Sveučilište u Zagrebu

Hrvatski studiji

Ivan Restović

LOGIČKO-POJMOVNA STRUKTURA BROUWEROVA INTUICIONIZMA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Prof. dr. sc. Srećko Kovač

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

University Department of Croatian Studies

Ivan Restović

LOGICO-CONCEPTUAL STRUCTURE OF BROUWER'S INTUITIONISM

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Prof. dr. sc. Srećko Kovač

Zagreb, 2018.

Informacije o mentoru

Srećko Kovač rođen je 1957. godine u Zagrebu. Diplomirao je 1981. na Filozofskome fakultetu u Zagrebu, a magistrirao 1986. na Fakultetu političkih znanosti u Zagrebu. Od 1989. do 1990. godine ostvaruje studijski boravak u Kölnu. Doktorirao je 1992. godine na Filozofskome fakultetu u Zagrebu.

Znanstveni je savjetnik u trajnome zvanju na Institutu za filozofiju u Zagrebu, gdje je zaposlen od 1986. Voditelj je znanstvenih projekata: *Logika, modalnosti i jezik* (2002.–2006.), *Logičke strukture i intencionalnost* (2007.–2012.), *Logika, pojmovi i komunikacija* (2015.–2018.). Predavao je na Hrvatskim studijima Sveučilišta u Zagrebu, kao i na sveučilištu u Osijeku.

Autor je knjiga *Logika kao demonstrirana doktrina: formalna logika u Kanta i njezina najranija recepcija u Hrvatskoj* (1992.), *Priručnik uz logiku* (2004.), *Logika: za gimnazije* (12. izd. 2004., 1. izd. 1994.), *Logičko-filozofijski ogledi* (2005.), *Logička pitanja i postupci* (u koautorstvu s B. Žarnićem, 2008.). Objavio je oko pedeset članaka u međunarodnim i hrvatskim časopisima i zbornicima. Redovito izlaže na znanstvenim skupovima, kako u Hrvatskoj, tako i u inozemstvu. Glavna su područja njegova znanstvena zanimanja filozofijska logika i povijest logike.[1]

[1]Izvori: `http://content.ifzg.hr/ skovac/index.html` i `http://noviweb.ifzg.hr/djelatnici/kovac-zivotopis`. Stranice su pojećene 5. srpnja 2018.

Sažetak

Cilj ovoga rada prikazati je Brouwerov intuicionizam u širem kontekstu njegove teorije "izlaska svijesti". Intuicionistička matematika slobodna je tvorevina ljudskoga uma, ali i sâm je um tvorevina; on je konstituiran u svijesti kao produkt jedne od njezinih "faza". Možemo kazati: svijest prethodi umu, a um matematici. U ovoj radnji nastojimo iznijeti rekonstrukciju razvoja svijesti u okviru Brouwerove šire filozofije. To i sami činimo u dvjema fazama. Najprije analizom temeljnih pojmova unutar teorije izlaska svijesti, a potom predlaganjem dviju logika kojih bi svojstva oslikala neke temeljne postavke Brouwerove teorije.

Prvi dio ovoga rada, naslovljen "Izlazak svijesti", donosi pojmovnu i tekstualnu rekonstrukciju i analizu Brouwerove teorije izlaska svijesti, najviše prema obziru na njegov kasni članak "Svijest, filozofija i matematika". Posebnu pozornost obraćamo na pojmove "jastvenosti" i "otuđenosti", čiju analizu u sekundarnim izvorima pronalazimo samo u van Dalena. Te pojmove smatramo temeljnima u Brouwerovoj filozofiji, budući da se u svijesti javljaju još u prvoj fazi, zajedno s mnogo poznatijom spoznajom vremena, u kojoj je utemeljena intuicionistička matematika. Također, kao funkciju otuđenosti Brouwer navodi "želju" i "zazor", bitne značajke osjetā prisutne već na samome početku izlaska svijesti.

Prateći izlazak svijesti naposljetku dolazimo do matematike i logike. Istražujemo i propitujemo položaj matematike u izlasku svijesti. Analiziramo domenu "čiste matematike", kontrastirajući je s "domenom osjetā", prisutnoj u svijesti prije pojave matematike. Potom tražimo mjesto logici u izlasku svijesti. Suprotno uvriježenomu mišljenju, tvrdimo kako je u intuicionizmu logika moguća i bez matematike. Naime, iznosimo mjesta na kojima Brouwer, čini se, zagovara neku vrstu logičkoga pluralizma. Prema ovome tumačenju, intuicionistička logika primjenjuje se kada zaključujemo o *matematičkim konstrukcijama*, dok klasičnu logiku možemo primjenjivati kada zaključujemo o vanjskome svijetu.

Time ujedno opravdamo primjenu klasične logike pri formalnome opisu izlaska svijesti, što je tema drugoga dijela rada, pod naslovom "Formalni prikaz izlaska svijesti". Kao polazišnu točku za logičku analizu izlaska uzimamo logiku promjene LCG, koju je 2007. ponudila K. Świętorzecka. Logiku LCG najprije opisujemo, a potom je modificiramo u skladu s Brouwerovom filozofijom.

Prvu fazu izlaska svijesti formalno opisujemo "jednostavnom logikom izlaska svijesti", LEC. Pretpostavivši analizu i rekonstrukciju ponuđenu u prethodnome poglavlju, iznosimo rječnik, gramatiku, model i sustav LEC. Odnose među pojmovima jastvenosti, otuđenosti, želje i zazora definiramo aksiomatskim shemama. U modelu rabimo "rastuće moguće svjetove", preuzete iz LCG, a podložne brouwerovskoj interpretaciji. Dokazujemo naposljetku pouzdanost i potpunost sustava jednostavne logike izlaska svijesti.

Drugu fazu izlaska svijesti opisujemo jezikom "proširene logike izlaska svijesti", koju nazivamo LEC$^+$. Model te logike preuzimamo iz LEC, ali sada razmatramo istinitost uzročnih iskaza, pojavom kojih u svijesti završava prva faza njezina izlaska. Temeljem Brouwerove definicije uzročnoga niza predlažemo uvjet istinitosti uzročnih iskaza. Uzročne odnose oslikavamo aksiomatskim shemama. Za sustav LEC$^+$ iznosimo dokaze pouzdanosti i potpunosti.

Nakraju, istražujemo odnos predstavljenih logika s nekim drugim formalizmima. Sustave LEC i LEC$^+$ uspoređujemo sa sustavima intuicionističke, posrednih, klasične i modalnih iskaznih logika. Opisane odnose prikazujemo rešetkom, na dnu koje se nalazi intuicionistička, a dva vrha "jednake visine" čine joj proširena logika izlaska svijesti i sustav S5. Isto tako, uspoređujemo bitne značajke semantike intuicionističke iskazne logike sa semantikama logika izlaska svijesti te istražujemo mogu li se te značajke prikazati unutar logika izlaska svijesti. Zaključujemo kako struktura mogućih "svijetova osjetā" iz ponuđenih logika izlaska svijesti ne odgovara u potpunosti stukturi mogućih matematičkih konstrukcija, iako su svi poučci intuicionističke logike sadržani u logikama LEC i LEC$^+$.

Ključne riječi: Brouwerova teorija izlaska svijesti, intuicionistička logika, intuicionizam, logika promjene LCG, uzročnost, vrijeme.

Summary

The aim of this work is to place Brouwer's intuitionism in a wider context of his theory of the "exodus of consciousness". Intuitionistic mathematics is a free creation of the human mind, but the mind itself is a creation; it is constituted in the "exiting consciousness" as a result of one of its "phases". We can say that the consciousness precedes the mind, and mind precedes mathematics. Here we try to offer a reconstruction of the development of consciousness. This we do in two phases. Firstly by analysing the fundamental concepts of Brouwer's theory, and secondly by proposing two logics elaborating in detail some of Brouwer's tenets.

The first part, titled "The exodus of consciousness", brings an analysis and reconstruction of Brouwer's theory of the exodus of consciousness, mostly in the light of his late article "Consciousness, philosophy, and mathematics". We draw special attention to the concepts of "egoicity" and "estrangement", analysis of which in the literature is provided by, as far as we know, only van Dalen. We deem these concepts fundamental in Brouwer's philosophy, as they appear as early as in the first phase, along with more widely known time-awareness as the foundation of mathematics. Moreover, as a function of estrangement, Brouwer defines "desire" and "apprehension", the essential characteristics of sensations present at the very outset of the exodus.

Following the exodus we eventually arrive at mathematics and logic. We explore and assess the location of mathematics in the exoudus of consciousness. We analyze the domain of "pure mathematics", contrasting it with the "domain of sensation", present in consciousness prior to the appearance of mathematics. Following that, we go on to find a place for logic in the same process. Contrary to the popular opinion, we claim that logic in intuitionism is possible even without mathematics. We offer textual evidence in support of the claim that Brouwer could have endorsed a kind of logical pluralism. In this interpretation, intuitionistic logic applies to reasoning about *mathematical constructions*, while classical logic can be applied when one reasons about the exterior world.

Thereby we also find a justification to apply classical logic to a formal description of the exodus of consciousness, which is the subject of the second part of this dissertation, titled "Formal account of the exoudus of consciousness". We take the logic of change LCG, proposed in 2007 by K. Świętorzecka, as a starting point in our logical analysis of the exodus. First we describe LCG itself, and then modify it according to Brouwer's philosophy.

The first phase of the exoudus in formally described by "simple logic of the exodus of consciousness", LEC. Taking into consideration the analysis provided in the previous part of the work, we lay out the language and system of LEC, providing also a model with truth conditions. The relations among egoicity, estrangement, desire and apprehension are defined by axiomatic schemata. Our model employs "growing possible worlds" taken from LCG, which are given a Brouwerian interpretaion. Lastly, we prove soundness and completenes for the system of simple logic of the exoudus of consciousness.

The second phase of the exoudus in formally described by "extended logic of the exodus of consciousness", which is called LEC$^+$. The model for this logic is taken from LEC, but now the trut of causal propositions – presence of which in consciousness marks the end of the first phase of the exodus – is also considered. Based on Brouwer's definition of causal sequence we propose a truth condition for causal propositions. Causal relation are depicted by axiomatic schemata. We prove soundness and completeness for system LEC$^+$.

Lastly, we explore the the relation of proposed logics to some other formal systems. We compare LEC and LEC$^+$ with systems of intuitionistic, intermediate, classical and some modal propositional logics. We picture this by a lattice, at the bottom of which there lies intuitionistic, while two peaks of the same "hight" are constituted by the extended logic of the exodus of consciousness and S5. Moreover, we compare the essential atributes of the semantics for intuitionistic logic with the semantices of proposed formalisms and explore if some properties of the former can be expressed in the latter. We conclude that the stucture of the "possible world of sensations", found in both proposed formal systems, cannot be tailored to account for the structure of possible mathematical experiences, although all the theorems of intuitionistic propositional logic are contained in LEC and LEC$^+$.

Key words: Brouwer's theory of the exoudus of consciousness, causality, intuitionism, intuitionistic logic, logic of change LCG, time.

Sadržaj

1 UVOD

Luitzen Egbertus Jan Brouwer poznat je kao utemeljitelj intuicionizma, filozofske teorije o podrijetlu matematike. Njegova je teorija nastala početkom dvadesetoga stoljeća, u razdoblju pojave paradoksā u matematici koji su uzrokovali takozvanu "krizu temelja" te znanosti. Ipak, Brouwerov intuicionizam, kao posebna vrsta matematičkoga konstruktivizma, nije osmišljen kao odgovor na novootkrivena proturječja unutar matematičkoga formalizma. Radi se o teoriji neovisno utemeljenoj u Brouwerovoj općoj teoriji svijesti.

U vremenu kada se činilo nužnim ponuditi plauzibilno epistemološko i ontologijsko utemeljenje matematike, Brouwer nudi odgovor različit od tada postojećih pristupa: logicizma, formalizma i platonizma. Temeljna teza intuicionizma jest da je matematika slobodna tvorevina ljudskoga uma te da su matematičke tvrdnje istinite tek kada su dokazane, konstruirane u umu pojedinca, "stvarajućega subjekta". Po tome se intuicionizam suprotstavlja platonizmu; za Brouwera je bitak matematičke istine čin njezine konstrukcije. Nadalje, Brouwer čini otklon od formalizma i logicizma navodeći posebne uvjete matematičke konstrukcije. Najprije, umske su konstrukcije *nejezične*, njihov je matematički zapis po svojoj prirodi različit od umskih konstrukcija. "Prava" se matematika odvija u umu, njezin jezični zapis služi tek kao mnemotehnika, da nas podsjeti na započete konstrukcije ili kako bismo svoje konstrukcije predočili drugima. Po ovome se intuicionizam oštro suprotstavlja formalizmu, koji matematiku vidi kao skup operacija nad simbolima. Slično tomu, matematika ne može biti utemeljena u logici, jer logika bi trebala opisivati principe koji su na snazi pri umskim konstrukcijama matematičkih istina. Riječima Brouwerova učenika i jednoga od utemeljitelja intuicionističke logike A. Heytinga: "[z]a konstrukciju matematike nije potrebno postaviti logičke zakone opće valjanosti; ti se zakoni iznova otkrivaju u svakome pojedinome slučaju" [51, str. 311]. Matematika, na određen način, dolazi prije logike. Tim više, i sama je mogućnost formalizacije matematike za intuicioniste upitna [89, str. 31].

Premda je intuicionizam najlakše opisati prema obziru na njemu suprotstavljene teorije, on je za Brouwera dio jedne šire, samostalne filozofije. Intuicionizam je zaista filozofija matematike, ali on je posljedica filozofije jednoga matematičara. Radi se, međutim, o vrlo nekarakterističnoj filozofiji, koja se odlikuje specifičnim kutom analize. Odlika je Brouwerova filozofiranja njegovo usmjeravanje na procese koji se odvijaju unutar misećega subjekta, na "faze" koji sačinjavaju i karakteriziraju subjektovu svjesnost. Uloga subjekta od presudne je važnosti u Brouwerovoj filozofiji. Ne samo u domeni (konstruktivističke intuicionističke) matematike, već i posve općenito, Brouwer se pri teoretiziranju oslanja najviše na unutarnji pogled, vlastitu svijest. I upravo je pojam *svijesti* jedan od ključnih pojmova za razumijevanje Brouwerove misli. U ovome ćemo poglavlju ponuditi kratku karakterizaciju Brouwerove filozofije svijesti, obraćajući posebnu pažnju na njezinu recepciju, ali i na položaj i značenje matematike unutar te filozofije.

Brouwer je vjerovao kako postoji postoji "najdublji dom" (*deepest home*) svijesti te kako svijest iz toga doma "izlazi" kroz nekoliko diskretnih "faza". Izlaskom iz najdubljega doma subjekt stvara "svoj vanjski svijet", najprije preko spoznaje protoka vremena, potom spoznajom uzročnosti, a naposljetku i tvorbom jezika, medija kojim u vanjskome svijetu nastoji komunicirati s drugim pojedincima, koji za njega nisu ništa drugo nego predmeti "vanjskog svijeta subjekta". Spoznaja vremena temeljni je moment izlaska svijesti i preduvjet svake druge (umske) spoznaje. Naime, poimanjem vremena svijest *postaje* umom (*mind*). Važno je napomenuti da je "izlazak svijesti" u stanovitome smislu degenerativan proces; svakim korakom od najdubljega doma svijest se udaljava od svoje istinske biti. Ipak, radi se o reverzibilnome procesu; u najdublji dom moguće je vratiti se [11].

Imajući na umu taj kratak opis izlaska svijesti, uzmimo sada kao primjer neka od klasičnih mjesta Brouwerove karakterizacije matematike, najprije takozvani "prvi akt intuicionizma", koji

> [...] potpuno odvaja matematiku od matematičkog jezika, posebice od fenomenā jezika opisanih teoretskom logikom, i prepoznaje da je intuicionistička matematika bitno nejezična aktivnost uma koja ima podrijetlo u percepciji *protoka vremena*, tj. raspadanja trenutka života (*the falling apart of a life moment*) u dvije različite stvari, od kojih jedna ustupa mjesto drugoj, ali zadržana je u pamćenju. Ako tako rođeno dvojstvo lišimo svih kvaliteta, tada preostaje *prazan oblik zajedničkoga substrata svih dvojstava.* Upravo taj zajednički substrat, taj prazni oblik, čini *osnovnu intuiciju matematike.*[2] [16, str. 509–510, kurziv u originalu]

Tako je govorio Brouwer pri koncu svoje karijere, tri godine prije no što će objaviti svoj posljednji znanstveni rad. No, sličnu formulaciju nalazimo još 40 godina ranije, u njegovu inauguracijskome predavanju na Sveučilištu u Amsterdamu, gdje navodi kako intuicionizam[3]

> [...] razmatra raspadanje trenutaka života u kvalitativno različite dijelove, ujedinjene ali odvojene vremenom kao osnovnim fenomenom ljudskoga intelekta,

[2] Ovaj i svi ostali prijevodi u ovome radu iznesenih dijelova Brouwerovih tekstova su naši.

[3] U citiranome djelu Brouwer svoju teoriju naziva "neointuicionizmom", kontrastirajući je s Kantovom, kojega vidi kao predstavnika starijega oblika intuicionizma. Za razliku od Kanta, Brouwer odbacuje apriornost prostora, no inzistira na apriornosti vremena.

prolazeći apstrahiranjem od svega emocionalnoga sadržaja u osnovni fenomen matematičkoga mišljenja, intuiciju čistog dvo-jedinstva. [17, str. 127.]

Mnogi su autori ta mjesta, možda s pravom, označili kao nedovoljno jasna. Primjerice, prvi citat vrlo detaljno analizira Tait u [90], žaleći se kako mu nije jasna fenomenološka analiza, kako mu je teško pronaći adekvatan primjer "raspadanja trenutka života", te da je samo protok vremena presiromašan za utemeljenje matematike. Na Taitove kritike u [76] odgovara Schlimm, istaknuši nužnost jasnoga razumijevanja širega korpusa Brouwerovih radova, kako bi nakraju u bilješkama i sâm priznao kao ti radovi često nisu dovoljno razumljivi te pozvao čitatelja da dovede u pitanje njegovu interpretaciju Brouwerovih navoda citiranih u članku. Nadalje, W. Kneale u [60, str. 674] kazuje kako je Brouwerova karakterizacija intuicije "opskurna", kako u drugome citatu, tako i u njegovim ostalim radovima, ali da "može biti zanimljiva filozofima". Spomenimo kako je i Devidé [42] ustvrdio: "[...] prema mišljenju eminentnih matematičara, mnogi su intuicionistički radovi, naročito Brouwerovi, teško razumljivi i nije uvijek dokraja jasno što se željelo reći".

Postoje barem dva razloga mogućega nerazumijevanja gornjih navoda, ali i ostalih izdvojenih mjesta Brouwerove filozofije. Prvi je, možda i trivijalan, nepoznavanje ostalih radova u kojima su pojedina mjesta detaljnije analizirana. Razmotrimo stoga pobliže neke od pojmova koji se javljaju u gornjim citatima. Pronalazimo pojmove kao što su "dvojstvo" ("dvo-jedinstvo"), "protok vremena", "um" ("intelekt")[4]. Brouwer također za matematiku tvrdi da je "nejezična aktivnost", a govori eksplicitno i protiv logičkoga jezika. Svaki od navedenih pojmova i tvrdnji pronalazimo unutrar Brouwerove općenitije filozofije svijesti, kao karakteristike faza kroz koje svijest prolazi na putu iz svojega najdubljega doma. Stoga ćemo obuhvatnijim poimanjem pozadinske teorije biti bolje konceptualno potkovanima za razumijevanje gornjih citata.

To nas vodi do drugoga mogućega razloga nerazumijevanja Brouwerove filozofije, a to je neosporna činjenica da je ta filozofija podosta nesvakidašnja i počesto hermetična. Glavni je "krivac" za to Brouwerovo shvaćanje pojma svijesti. Taj pojam moramo shvatiti u posebnome značenju, i to dijelom prema obziru na utjecaje na razvoj Brouwerove opće filozofije. Radi se o svijesti pojmljenoj slično mističkoj tradiciji. Naime, Brouwerova opća filozofija često se, barem djelomično, označava kao "misticizam". To vjerojatno nije uvijek opravdano jer je epitet "mistično" vrlo često sinonim za "hermetično", "jezgrovito", "egzotično" ili naprosto – "nerazumljivo".

Istina, Brouwer u svojoj filozofiji razlikuje "faze" ili etape razvoja svijesti, što je, u vrlo grubim crtama, jedna od temeljnih karakteristika misticizma. Nadalje, jedno od ključnih

[4] Na ovome mjestu još nećemo razmatrati razliku između posljednjih dvaju pojmova.

djela za razumijevanje njegove filozofije zove se "Život, umjetnost i *misticizam*". No, za razliku od tipično mističke motivacije, koja je više usmjerena na *postizanje* stanovitih stanja svijesti, mi ćemo Brouwerove etape svijesti nastojati pojmovno-logički analizirati. Pritom ćemo se najviše koncentrirati na Brouwerovo prvo izdano djelo, "Život, umjetnost i misticizam" [27] te njegove članke "Matematika, znanost i jezik" [28] "Volja, znanje i govor" [26] i "Svijest, filozofija i matematika" [11].

Ti se radovi često nazivaju "filozofičnijim" Brouwerovim radovima [81]. I sâm Heyting, poznati Brouwerov učenik i urednik prvoga sveska njegovih sabranih djela [10] te radove klasificira i pod "opću filozofiju i misticizam". Nadalje, u [5, 50, 37] govori se o "Brouwerovom misticizmu", a van Atten u [1, str. 65] navodi kako je zbog svojih "mističkih svojstava" Brouwerova opća filozofija često zamenarena. Mnogim ne-filozofima – ali i filozofima – aluzija na misticizam bila bi dovoljan razlog za diskreditaciju nekoga djela. I zaista, Brouwerova teorija "izlaska svijesti" nije uvijek adekvatno valorizirana, što se očituje u pristupačnosti i recepciji njegovih filozofičnijih radova.

Eklatantan primjer tomu jest zbornik radova iz filozofije matematike koji su uredili Putnam i Benacerraf [8]. U zborniku se nalaze dva Brouwerova rada, njegovo inauguracijsko predavanje "Intuicionizam i formalizam", iz kojega smo gore citirali, i njegov članak "Svijest, filozofija i matematika". No, potonji rad nije prenesen u cijelosti. Iz njega je izostavljeno prvih osam i pol stanica, koje možemo naći u Brouwerovim sabranim djelima, gdje je članak prenesen u potpunosti. Burgess [30, str. 141] je humoristično komentirao kako autori "ostavljaju Kanta, ali izbacuju Krišnu", aludirajući na dijelove Brouwerova članka prenesene iz Bhagavad Gite. Ipak, izbačeno je mnogo više od toga, pa se svakako može ustvrditi da se radi o nepravdi po razumijevanje cjelokupne Brouwerove filozofije jer se upravo članak "Svijest, filozofija i matematika" uzima kao najsustavniji prikaz Brouwerove teorije svijesti [1, 6, 37]. Upravo ondje nalazimo pojam "najdubljega doma", a za svijest se kazuje kako iz tog doma "izlazi". Odatle dolazi i naziv Brouwerove teorije svijesti kao teorije "izlaska svijesti". Pretpostavit ćemo da urednici Benacerraf i Putnam nisu pojam svijesti smatrali relevantnim za utemeljenje matematike. Brouwer svakako jest jer matematika je za njega posljedica razvoja svijesti, razvoja koji se odvija u fazama, etapama, i u kojem postoje utvrđeni preduvjeti da bi se o matematici moglo misliti, a kamoli govoriti. Osim toga, u izostavljenome djelu članka nalazi se definicija matematike analogna dvjema definicijama koje smo gore citirali.

Svakako valja posvetiti pozornost i već spomenutoj knjižici *Život, umjetnost i misticizam*, izašloj na nizozemskome 1905. Radi se, naime, o još jednome djelu koje nije preneseno u cjelosti, ovaj put u samim Brouwerovim sabranim djelima [10]. Urednik

Heyting u bilješci [str. 565] spomenuo je kako objavljivanje cjelovitoga prijevoda ne dolazi u obzir jer se Brouwer neobazrivo raspisao o temama koje nemaju veze s njegovim temeljnim idejama.[5] No, dodao je i vrlo značajnu opasku da se radi o filozofskoj poziciji koju je Brouwer držao cijeloga života. Potvrda tomu jest i činjenica da je Brouwer nekoliko puta i sâm pokušao objaviti engleski prijevod djela [82], posljednji puta 1964., dvije godine prije svoje smrti.

Radi se o knjižici nastaloj iz skupa predavanja koja je Brouwer držao još kao student; odlikuje se raznolikošću citiranih izvora, što u Brouwera u pravilu nije slučaj. Primjerice, citirane su misli Meistera Eckharta, Jakoba Böhmea, Flauberta, kao i dijelovi Bhagavad Gite. No, te dijelove možemo pronaći samo u potpunoj verziji djela u [27], kojega prijevod na engleski donosi van Stigt. Možemo pretpostaviti da je Heyting sporne dijelove izbacio kako bi izbjegao Brouwerovu diskreditaciju. I zaista, neki se dijelovi *Života, umjetnosti i misticizma* mogu protumačiti na način koji bi Brouwera učinio mizantropom, antinatalistom ili šovinistom. Mi smo pak mišljenja kako u spomenutoj knjižici postoje itekako filantropska mjesta te da su sporni dijelovi sporni samo ako ih se promatra izvan širega filozofijskoga, ali i povijesnoga konteksta, pa ćemo ponovno ustvrditi da se radi o još jednoj nepravdi po razumijevanje Brouwerove cjelokupne filozofije, možda najviše zbog citiranih izvora koje je Heyting propustio ponuditi.

Osim što u citatima Eckharta, Böhmea, Flauberta i dijelovima Bhagavad Gite pronalazimo važne utjecaje na razvoj Brouwerove filozofije, u njima vidimo i primjer adekvatne uporabe jezika. Naime, Brouwer je velik dio karijere posvetio upravo kritici jezika, kako jezika općenito, tako i logičkoga jezika. Kritika potonjega kudikamo je poznatija, a najviše se očituje u Brouwerovoj kritici valjanosti načela isključenja trećega. No, kao što smo naveli, nastanak jezika samo je jedna od etapa na putu svijesti iz najdubljega doma. Jezik nastaje tek kada se ukaže potreba za komunikacijom s ostalima, a taj je korak dobrano udaljen od najdubljega doma.

Kako smo već naveli, za Brouwera postoji mogućnost povratka u najdublji dom; knjižica *Život, umjetnost i misticizam* nam daje neke od uputa. Kako bi te upute bolje predstavio, Brouwer citira autore koje je Heyting, kao urednik njegovih sabranih djela, nažalost izostavio. Kod Böhmea i ostalih jezik je sugestivan i alegoričan, a to su odlike koje je Brouwer označio pozitivnima i u svojoj kasnijoj filozofiji, posebice u [26]. U [82] van Stigt navodi kako je *Život, umjetnost i misticizam* od presudne važnosti, kako za razumijevanje Brouwera kao ličnosti, tako i za poimanje njegove filozofije matematike.

[5] U [34] nalazimo podatak da je Heytinga trebalo nagovarati da u Brouwerova sabrana djela uključi čak i skraćenu verziju.

Djelo je pisano slobodnijim, mjestimice ponešto moralizirajućim stilom te odiše pesimizmom i "romantičkim antiintelektualizmom" popularnim među nizozemskim intelektualcima krajem 19. i početkom 20. stoljeća [81, 82]. Uspijemo li prijeći preko nekih u današnje vrijeme vidno začudnih dijelova, pronaći ćemo potvrdu kako je Brouwer svoju filozofsku poziciju detaljno razvio još kao student. Danas se u literaturi Brouwerov *Život, umjetnost i misticizam* u svojoj potpunoj verziji redovito ne izostavlja te često služi kao ključ za razumijevanje njegove teorije svijesti.

Godine 1907. izlazi Brouwerova disertacija, *O temeljima matematike* [20], izvorno pisana na nizozemskome. Disertacija se sastoji od triju poglavlja, prvo se bavi intuicioničkom rekonstrukcijom matematike, drugo odnosom matematike i iskustva, a treće odnosom matematike i logike. Mi ćemo se najviše usredotočiti na drugo poglavlje. No, spomenimo kako već u prvome poglavlju pronalazimo Brouwerovu karakterističnu definiciju matematike, dok u trećem poglavlju Brouwer argumentira u prilog stavu da je matematika neovisna od logike, što će postati specifikum intuicionističkoga pomanja logike.

Svoju filozofiju svijesti Brouwer je u elementima iznio u drugome poglavlju. Poglavlje započinje kratkom karakterizacijom ljudskoga djelovanja, formuliranom vrlo slično opisu koje koje iznosi u svojim kasnijim filozofičnijim radovima, posebice u [28] i [26]. Zbog nagle promjene fokusa s matematičkih konstrukcija na ljudsku prirodu, drugo poglavlje na prvi pogled "odskače" od ostatka disertacije. Kuiper [67, str. 197] primjećuje: "[m]ožemo se zapitati što je Brouwer imao na umu tim poglavljem, koje stoji u tako oštome kontrastu s ostalim dvama, i koje se čini, pogotovo njegov prvi dio, tako nevezanim uz konstrukciju čiste matematike". Odgovor na to pitanje jest da Brouwer drugo poglavlje svoje disertacije uopće nije imao na umu, barem ne u inicijalnome planu za svoj doktorski rad.

Naime, Brouwerova se disertacija u svojem konačnome obliku podosta razlikuje od onoga što je izvorno htio prezentirati. Potvrda tomu jest rukopis Brouwerove disertacije pronađen 1976., iz kojega se očituje da je objavljena inačica rada rezultat stroge cenzure Brouwerova mentora, Diederika Kortewega. Brouwer je svoj doktorski rad pisao u isto vrijeme kada i *Život, umjetnost i misticizam.* Uz nešto truda, možemo pronaći sličnosti između Brouwerova "mističnijega" djela i konačne inačice njegove disertacije. Ipak, jasnu vezu između njegove filozofije svijesti i njegove filozofije matematike možemo uspostaviti tek na temelju odbijenih dijelova njegove disertacije, koje je u engleskome prijevodu ponudio van Stigt [80, 81].

Iz odbijenih dijelova možemo sa sigurnošću ustvrditi da je Brouwer i prije objavljivanja disertacije imao koherentnu ideju o položaju matematike unutar jedne šire teorije svijesti. Stoga je najveću cenzuru pretrpjelo upravo drugo poglavlje, koje je izvorno svojim tonom bilo mnogo sličnije Brouwerovu ranije objavljenomu djelu, a koje je Brouwer smatrao najvažnijim dijelom disertacije; primjerice, Brouwer je bio prisiljen izbaciti prvih šest stranica uvoda u drugo poglavlje. Kritike svojega mentora Brouwer ipak nije prihvatio "bez borbe", čemu u prilog govori oko 146 pisama [80] koje je izmijenio s Kortewegom. Dio korespondencije pronalazimo u [81]. Disertacija *O temeljima matematike* stoga je rezultat konsenzusa, riječima van Dalena [34, str. 299]: "Korteweg je dobio svoju matematiku, a Brouwer je izbacio većinu filozofije".

Spomenimo preostala dva Brouwerova "filozofična" članka, "Matematika, znanost i jezik", izašloga na njemačkome 1929. i "Volja, znanje i govor", izašloga na nizozemskome 1933., kojih u njegovim sabranim djelima nema u engleskome prijevodu. Oba rada sastoje se od triju dijelova, a prva su im dva dijela gotovo identična. U kasnijem djelu Brouwer unosi važne dodatke, poput pojma "idealnoga matematičara" i "jastvenosti"; potonjemu ćemo u ovoj disertaciji posvetiti posebnu pozornost. U sabranim djelima urednik Heyting prenosi raniji članak na njemačkome jeziku, a Brouwerove dodatke iz 1933. donosi u bilješkama uz tekst, prevodeći ih s nizozemskoga na engleski. Članak iz 1933. ne iznosi u cijelosti, kako ne bi bilo ponavljanja, već daje samo engleski prijevod trećega dijela rada. Kasnije je oba rada na engleski preveo van Stigt [28], [26]. Spomenimo također kako, prema našem saznanju, nijedan Brouwerov rad nije preveden na hrvatski jezik.

Prijeđimo sada na radove koji tematiziraju Brouwerovu opću filozofiju. Premda nesvakidašnja, Brouwerova pozadinska ili opća filozofija, njegov misticizam, njegova teorija svijesti te njegov *Lebensanschauung* – što zasad možemo shvatiti kao sinonime – nije bez analize u sekundarnoj literaturi. Razlog je tomu, kao što smo gore naveli, činjenica da Brouwerovi poznatiji filozofemi, posebno oni o prirodi matematike, prirodno slijede iz njegovih općenitijih filozofskih uvjerenja. Stoga gotovo nitko od autora ne zanemaruje postojanje Brouwerove opće filozofije, no postoje razlike u shvaćanju njezine relevantnosti, kako uopće, tako i za za Brouwerovu filozofiju matematike i njegove matematičke rezultate.

Također, postoje velike razlike u zastupljenosti analiziranih izvornih djela. Ponekad se Brouwerova pozadinska filozofija razmatra na temelju jednoga ili dvaju poznatijih spisa, dok neki autori u obzir uzimaju velik broj raznovrsnih radova, primjerice, Brouwerova pisma ili njegove bilježnice. Nekad je pristup tematski, nekad pak povijesni, a često se javljaju i relevantni biografski elementi. Pogotovo, ne posvećuju svi jednaku pažnju pojmu svijesti, čemu razlog može biti činjenica da se i sâm Brouwer tim pojmom najsustavnije koristi tek u svome najkasnijem i najsustavnijem filozofičnome djelu, "Svijest, filozofija i matematika". Općenito, u literaturi češće nalazimo prikaz ili rekonstrukciju Brouwerove opće filozofije, potom usporedbu Brouwera s drugim filozofima, a tek rijetko kritiku njegove teorije svijesti.

Postoji ipak jedno svojstvo koje dijele gotovo svi tekstovi čiji su se autori odlučili okušati u tumačenju, rekonstrukciji, ili iznošenju Brouwerove pozadinske filozofije – velika količina citatā. Vjerujemo da je to ponekad zbog Brouwerova zbijenoga načina izražavanja, ponekad pak zbog ostalih odlika njegova stila, primjerice govora u prenesenome značenju, ali gotovo uvijek radi boljega razumijevanja. Neka su od djela posebno značajna jer donose teško dostupne citate iz Brouwerovih neobjavljenih radova, njegove korespondencije ili njegovih privatnih bilježnica. Tim bolje ako su citirani dijelovi razjašnjeni, stavljeni u kontekst i analizirani.

Sveobuhvatan prikaz Brouwerove filozofije, pa tako i njegove teorije izlaska svijesti nalazimo u van Stigta [81]. Radi se o opsežnoj monografiji Brouwerove filozofije. Djelo se odlikuje širokom analizom Brouwerovih radova, rekonstrurajući kako njegovu opću filozofiju, tako njegovu filozofiju matematike, logike i jezika. Najveći dio monografije ipak je posvećen Brouwerovu poimanju matematike, pa su mnoga mjesta iz Brouwerove teorije svijesti analizirana upravo u tome kontekstu. Utoliko je van Stigtova rekonstrukcija izlaska svijesti "raspršena" unutar različitih dijelova ovoga obimnoga djela. Posebno su vrijedni dodaci na kraju knjige, gdje autor između ostaloga donosi prijevode nekih Brouwerovih dotad neodostupnih djela. Ondje nalazimo i po prvi put objavljen cjelovit engleski prijevod članka "Volja, znanje i govor", veoma važnoga za razumijevanje Brouwerove opće filozofije. Među dodatcima značajnima za razumijevanje Brouwerove teorije svijesti jesu i "Ispovijest vjere", sastavak koji Brouwer je napisao sa 17 godina u svrhu primitka u Remonstrantsku crkvi, kao i odbijeni dijelovi njegove disertacije.

Značajan doprinos tumačenju Brouwerove filozofije daje van Dalen. U [35] nudi rekonstrukciju Brouwerove opće filozofije, najviše se koncentrirajući na njegov kasni rad, "Svijest, filozofija i matematika". Težište rada je matematičko, stoga van Dalen u tumačenju ne uzima u obzir 'Život, umjetnosti i misticizam", za koji kazuje da "nudi uvid u emocionalnu i moralnu pozadinu kasnijih spisa, ali ne predstavlja ništa ni blizu koherentnoj filozofiji" [35, str. 212]. Nadalje, autor posvećuje znatnu pozornost Brouwerovu pojmu "jastvenosti", što u drugih tumača gotovo redovito izostaje. No, taj pojam – koji u Brouwera nalazimo u okviru njegove teorije izlaska svijesti – van Dalen potkrepljuje primjerima iz matematike, u kontekstu nizova brojeva.

O jastvenosti van Dalen govori i u [36], radu čiji je fokus na Brouwerovu poimanju jezika, komunikacije i logike. Brouwerova je opća filozofija sažeto opisana, a autor je naziva "subjektivističkim redukcionizmom" [str. 3]. Brouwerovom misticizmu van Dalen pak posvećuje nešto veću pažnju u [34, 37]. U [34] autor "miješa povijest i intuicionizam" [str. 291] fokusirajući se na kontenkst nastanka Brouwerove disertacije u okviru njegovih pozadinskih filozofskih uvjerenja. Autor analizira citate iz *Života, umjetnosti i misticizma* dovodeći ih u odnos s odbijenim dijelovima Brouwerove disertacije, ali i donosi i vrijedne dijelove iz Brouwerove korespondencije. Od posebnoga su značenja manje dostupni citati iz Brouwerovih bilježnica s početka njegove karijere, kao i dijelovi citirani iz Brouwerove "Ispovijesti vjere", koje van Dalen analizira prema obziru na kasniju Brouwerovu filozofiju.

U [37] autor nudi opsežan pregled tema kojima se Brouwer bavio, a za nas je od posebno važan početni dio rada gdje se tematizira Brouwerov misticizam. Ondje van Dalen nudi zaokružen pregled Brouwerove pozadinske filozofije, uz opaske o promjenama u terminologiji i fokusu, a nalazimo i komentare o solipsizmu, kao jedne od mogućih odlika Brouwerove filozofije.[6]

Brouwerovu opću filozofiju van Dalen kratko rekonstruira i u [39]. Koncentrirajući se na rehabilitaciju Brouwerove disertacije, autor ondje iznesene Brouwerove stavove dovodi u odnos s kasnijim filozofičnijim radovima. Spomenimo kako je van Dalen autor Brouwerove biografije [41] te prijevoda odabranih dijelova njegove korespondencije [40], gdje nalazimo dodatna objašnjenja i potvrde Brouwerovih stavova.

Analizu Brouwerove opće filozofije nalazimo u Koetsiera [61], najviše prema obziru na djelo *Život, umjetnost i misticizam*, koje autor sažima, analizirajući njegov prvi dio. Izneseni su i vrijedni dijelovi rane Brouwerove korespondencije, koja ima pomoći pri boljem tumačenju djela. Brouwerovi su stavovi uspoređeni sa Schopenhauerovim i Gödelovim. Posebno je vrijedna kratka, ali i jezgrovita usporedba s Eckhartom i Böhneom, kao i mjestima iz Bhagavad Gite. Koetsier nastoji pokazati kako nema neslaganja između Brouwerova "misticizma" i njegove matematičke karijere.

Brouwerov *Život, umjetnosti i misticizam* tema je i van Stigt [82]. Članak je objavljen uz [27], a služi kao uvod i ključ za razumijevanje te možda blagonaklonije čitanje van Stigtova cjelovitoga prijevoda. U članku je pružen historijski i intelektualni kontekst nastanka toga "ideološkoga manifesta" [82, str. 381].

U [46] Brouwerov *Lebensanschauung* Franchella uspoređuje s Nietzscheovim. Autorica rekonstruira Brouwerove stavove o vanjskome svijetu, uzročnosti, jeziku, komunikaciji i umu spletom i popratnom analizom relevantnih citata, najviše iz djela *Život, umjetnost i misticizam*, ali i članaka "Volja, znanje i govor" i "Svijest, filozofija i matematika". Poseban je naglasak na "moralnome aspektu" matematike i logike, odnosno (ne)opravdanosti

[6] Nije rijetkost da se Brouwera "optužuje" za solipsizam. Tom ćemo se temom pozabaviti u potpoglavlju 2.8.

njihove primjene na vanjski svijet. Franchella također posvećuje detaljniju pozornost važnome razlikovanju svijesti i uma, što se u literaturi često previđa ili spominje samo usput.

Analizu Brouwerove opće filozofije nalazimo i u Kuipera [67], posebice u poglavlju "Matematika i iskustvo", nazvanome prema drugome poglavlju Brouwerove disertacije. Autor se u analizi oslanja na područja i probleme koje Brouwer tematizira u spomenutome poglavlju. Posebna je pažnja posvećena Brouwerovom poimanju fizike, uz rekonstrukciju Brouwerova shvaćanja kauzalnosti i njegova pogleda na znanosti općenito. Nalazimo vrijedne i mnogobrojne, u literaturi inače manje spominjane navode iz Brouwerovih bilježnica, koji pomažu upotpuniti mozaik. Za nas su od posebne važnosti stavovi koje je Brouwer u bilježnicama iznio o uzročnosti, prostoru, vremenu, kao i komentari o Kantovoj filozofiji. Kuiper, međutim, često spominje Brouwerov navodni solipsizam, no za to ipak iznosi malo potvrda iz primarne literature.

Potencijalnomu problemu solipsizma u Brouwera pažnju posvećuje Placek u [71]. Fokus djela jest na komunikabilnosti *matematičkih* rezultata unutar intuicionizma; autor pokazuje kako Brouwerova teorija subjekta i njegovo poimanje matematike ne isključuje mogućnost intersubjektivnosti. U djelu također nalazimo kratku rekonstrukciju Brouwerove opće filozofije, kojoj autor pristupa ne uzimajući u obzir "mističnije" dijelove, tvrdeći: "iako nam saznanje o Brouwerovu pogledu na život i njegovoj percepciji Schopenhauera i istočnih filozofija može reći mnogo o njegovoj osobnosti ili nam čak pomoći razumjeti njegovo filozofsko stajalište, ono ima malo utjecaja na valjanost njegovih argumenata za matematički intuicionizam" [71, str. 18].

O intersubjektivnosti govori i van Atten u [3], ali iz husserlovske perspektive. Premda je naslov djela "O Brouweru", autor se nije bavio njegovim misticizmom, već je veću pažnju posvetio njegovim matematičkim rezultatima i njegovu poimanju matematike kao takve, ali i logike unutar matematičkoga konteksta. Zato je kritičku analizu Brouwerovog misticizma van Atten iznio u [1]. Obrađujući Brouwerov najkasniji filozofični tekst "Svijest, filozofija i matematika", van Atten pokazuju kako Brouwerova filozofija nije refleksivna – ne može objasniti samu sebe – odnosno da u Brouwerovoj teoriji razvoja svijesti nema faze ili etape svijesti koja bi mogla kao predmet imati samu podjelu svijesti na faze. Zasad nećemo zauzeti stav prema van Attenovoj kritici, ali ustvrdit ćemo kako je dobrodošla, jer radi se o jednoj od rijetkih "internih" kritika Brouwerove pozadinske filozofije.

U istoga autora u [5] nalazimo usporedbu Brouwerova i Gödelova misticizma te njegova odnosa prema matematici, koja je u Brouwera i Gödela shvaćena vrlo različito. Kroz prizmu odnosa misticizma i matematike jezgrovito je objašnjena Brouwerova pozadinska filozofija. Brouwerovu teoriju svijesti nalazimo i u kratkoj usporedbi Husserlova i Brouwerova poimanja matematike. Vezano uz Husserla, Posy u [74] donosi kratak opis Brouwerove opće filozofije, tamo pod nazivom "opća fenomenologija". Fokus rada ipak je Brouwerova "fenomenologija matematike" i njegovo poimanje kontinuuma.

Kratak opis Brouwerova misticizma nalazimo u Hesselinga [50]. Autor govori o Brouwerovu misticizmu iz biografske i povijesne perspektive, a usredotočuje se najviše na Brouwerovu recepciju i utjecaje. Makar Brouwerova opća filozofija nije rekonstruirana, Hesseling opisuje "idealističke korijene" ranoga razvoja Brouwerove filozofije, koju naziva i "ontološkim solipsizmom"[50, str. 27], na temelju analize dijelova sastavka "Ispovijest vjere".

Rekonstrukciju Brouwerove opće filozofije iznosi i Schlimm [76], gdje odgovara na kritiku Brouwerova poimanja intuicije matematike koju iznosi Tait u [90], uzimajući u obzir, za razliku od Taita, šiti korpus Brouwerovih radova, uključujući *Život, umjetnost i misticizam*, "Volju, znanje i govor", kao i odbijene dijelove Brouwerove disertacije.

Cilj ovoga rada prikazati je Brouwerov intuicionizam unutar šire strukture njegove teorije izlaska svijesti. Intuicionistička matematika slobodna je tvorevina ljudskoga uma, ali i sâm um je tvorevina; on je konstituiran u "izlazećoj svijesti" kao produkt jedne od njezinih "faza". Možemo kazati: svijest prethodi umu, a um matematici. U ovoj radnji nastojimo iznijeti rekonstrukciju razvoja svijesti. To činimo u dvjema fazama. Najprije analizom temeljnih pojmova unutar Brouwerove teorije izlaska svijesti, a potom predlaganjem dviju "logika izlaska svijesti".

Prvi dio ovoga rada, naslovljen "Izlazak svijesti", donosi rekonstrukciju i analizu Brouwerove teorije izlaska svijesti, najviše prema obziru na njegov kasni članak "Svijest, filozofija i matematika", na koji se nadalje referiramo pozivajući se na bibliografijski jedinicu [11]. To činimo i s ostalim Brouwerovim filozofičnim radovima: *Život, umjetnost i misticizam*, *O temeljima matematike*, "Matematika, znanost i jezik", "Volja, znanje i govor", na koja upućujemo kao: [27, 20, 28, 26]. Svaka faza izlaska svijesti posebno je objašnjena.

Analiziramo značajke Brouwerove karakterizacije izlaska svijesti iznesene u [11], koju uspoređujemo s ranijim opisima, najviše u [26]. Često se služeći metodom komprativne analize izvornih tekstova, izdvajamo nekoliko pojmova ključnih za opis i razumijevanje teorije izlaska svijesti. Posebnu pozornost obraćamo na pojmove "jastvenosti" (*egoicity*) i "otuđenosti" (*estrangement*), kojih analizu u sekundarnim izvorima pronalazimo samo u van Dalena [35, 36]. Te pojmove smatramo temeljnima u Brouwerovoj filozofiji, budući da se u svijesti javljaju još u prvoj fazi, zajedno s mnogo poznatijom "svjesnosti vremena". Također, kao funkciju otuđenosti Brouwer navodi "želju" (*desire*) i "zazor" (*apprehension*), bitne značajke osjetā prisutne već na samome početku izlaska svijesti. Ističemo i pojam (slobodne) volje, koji bi mogao biti od presudne važnosti za izlazeću svijest, a za koji smatramo da je ostao bez detaljnije razrade u sekundarnoj literaturi.

Prateći izlazak svijesti, u našoj pojmovnoj analizi tek u zadnjim potpoglavljima prvoga poglavlja dolazimo do matematike i logike. Istražujemo i propitujemo položaj i značenje matematike u izlasku svijesti. Analiziramo domenu "čiste matematike", kontrastirajući je s "domenom osjetā", prisutnoj u svijesti prije pojave matematike. Potom pronalazimo mjesto logici u izlasku svijesti. Suprotno uvriježenomu mišljenju, tvrdimo kako je logika moguća i bez matematike. Naime, iznosimo mjesta na kojima Brouwer, čini se, zagovara neku vrstu logičkoga pluralizma. Prema našem tumačenju, intuicionistička logika primjenjuje se kada zaključujemo o *matematičkim konstrukcijama*, dok klasičnu logiku možemo primjenjivati kada zaključujemo o vanjskome svijetu.

Time ujedno opravdamo primjenu klasične logike pri formalnome opisu izlaska svijesti, što je tema drugoga dijela rada, pod naslovom "Formalan prikaz izlaska svijesti". Kao polazišnu točku za logičku analizu izlaska svijesti uzimamo logiku promjene LCG, koju je ponudila K. Świętorzecka, najdetaljnije u [86]. Najprije iznosimo opis i analizu LCG, a potom je modificiramo u skladu s Brouwerovom filozofijom.

Prvu fazu izlaska svijesti formalno opisujemo "jednostavnom logikom izlaska svijesti", LEC. Pretpostavivši analizu i rekonstrukciju ponuđenu u prethodnome poglavlju, iznosimo rječnik, gramatiku, model i sustav LEC. Odnose među pojmovima jastvenosti, otuđenosti, želje i zazora definiramo aksiomatskim shemama. U modelu rabimo rastuće moguće svjetove, preuzete iz LCG, a podložne "brouwerovskoj" interpretaciji. Dokazujemo svojstva pouzdanosti i potpunosti sustava jednostavne logike izlaska svijesti.

Drugu fazu izlaska svijesti opisujemo jezikom "proširene logike izlaska svijesti", LEC$^+$. Model te logike preuzimamo iz LEC, ali sada razmatramo istinitost uzročnih iskaza, pojavom kojih u svijesti završava prva faza njezina izlaska. Temeljem Brouwerove definicije uzročnoga niza iz [11] predlažemo uvjet istinitosti uzročnih iskaza. Uzročne odnose oslikavamo aksiomatskim shemama. Za sustav LEC$^+$ iznosimo poučke pozdanosti i potpunosti.

Nakraju, istražujemo odnos predstavljenih logika s nekim drugim formalizmima. Sustave LEC i LEC$^+$ uspoređujemo sa sustavima intuicionističke, posrednih, klasične i modalnih iskaznih logika. Opisane odnose prikazujemo rešetkom, na dnu koje se nalazi intuicionistička, a dva vrha "jednake visine" čine joj proširena logika izlaska svijesti i sustav S5. Isto tako, uspoređujemo bitne značajke semantike intuicionističke logike sa semantikama logika izlaska svijesti te istražujemo mogu li te značajke prikazati unutar logika izlaska svijesti.

2 “IZLAZAK SVIJESTI”

2.1 Metoda i polazište

U ovome ćemo poglavlju ponuditi rekonstrukciju Brouwerove teorije “izlaska svijesti” [11, str. 483]. Kažimo prije svega zašto smo odabrali riječ “rekonstrukcija”, a ne, primjerice, “prikaz” ili “sažetak”. Naime, kako smo spomenuli u Uvodu, Brouwer je svoju opću ili pozadinsku filozofiju iznio u svega nekoliko radova. Srž Brouwerove opće filozofije nije se mijenjala; Brouwer je svoju teoriju s godinama produbio, a većina promjena bila je terminološke prirode. Ono što se isto tako nije mijenjalo Brouwerov je koncizan način izražavanja. Utoliko je u nekim radovima pojedina mjesta teže shvatiti bez konzultacije drugih radova. Kako smo također naveli u Uvodu, i drugi su autori Brouwerovu filozofiju rekonstruirali, najčešće analizom citata iz njegovih filozofičnijih radova. I mi ćemo se odlučiti za sličan pristup. Pritom ćemo kao polazišnu točku uzeti Brouwerov posljednji filozofski članak, “Svijest, filozofija i matematika” [11].

Recimo također nekoliko riječi o samoj metodi rekonstrukcije. Naša će rekonstrukcija biti *pojmovna*, za razliku od, primjerice, *povijesne* ili *tematske* rekonstrukcije. To znači da ćemo nastojati izlučiti najvažnije pojmove unutar Brouwerove opće filozofije. Glavni razlog tomu jest krajnji cilj ovoga rada – iznijeti *pojmovno-logičku analizu* Brouwerove teorije svijesti. Nećemo tvrditi kako naša metoda analize ima prednost “po sebi”, ali smatramo da, iz aspekta formalizacije, pojmovna analiza ima komparativnu prednost.

Valja nešto reći i o predmetu naše analize. Dosad smo naizmjence upotrebljavali nekoliko izraza: “Brouwerova opća filozofija”, “Brouwerova pozadinska filozofija”, “Brouwerov misticizam”, “Brouwerov *Lebensanschauung*”, kao i “Brouwerova filozofija (ili teorija) (izlaska) svijesti”. U daljnjoj analizi odlučit ćemo se za nešto konkretniji termin – “Brouwerova teorija svijesti”. Kako ćemo nastojati pokazati u ostatku rada, Brouwerova filozofija matematike, pa i njegova posebna konstruktivistička matematika, posljedica su njegova poimanja razvoja svijesti. Za svijest Brouwer kazuje kako “izlazi iz najdubljega doma” [11], pa ćemo često govoriti i o “teoriji izlaska svijesti”.

Tvrdit ćemo dakle kako postoji nekoliko ključnih pojmova za razumijevanje Brouwerove filozofije. Mnogi od njih su predmet analize u široj filozofskoj literaturi, poput pojmova *uma* i *kauzalnosti*. Kod Brouwera su oni ipak pojmljeni u posebnome smislu, pa ćemo njihovo značenje predstaviti prema definicijama kojima se koristio sam Brouwer. Pojmove ćemo uvoditi i analizirati postupno, pazeći na njihov redoslijed unutar tri faze izlaska svijesti. U našoj ćemo analizi također pokušati utvrditi postoje li razlike u definicijama ključnih pojmova, uzimajući u obzir širi korpus Brouwerovih radova. Za neke pojmove Brouwer nije ponudio definiciju. Ustvrdimo li da su značajni, njihovo značenje pokušat ćemo rekonstruirati iz konteksta njihove upotrebe u Brouwerovim radovima.

Već smo u Uvodu kratko naznačili kako se [11] uzimlje kao najzreliji prikaz Brouwerove opće filozofije [1, 6, 37, 41]. Mnoge tvrdnje koje Brouwer ondje iznosi pronalazimo i u njegovim ranijim djelima. Ipak, [11] odlikuje se posebnom pažnjom prema jasnoći i preciznoj upotrebi terminologije. Također, za razliku od polemičkoga i moralističkoga tona njegova ranoga djela [27] i "osvajačkog" [41, str. 755] ili "proročkoga" [43, str. 1170] stila izražavanja u dvama filozofičnim člancima koje iznosi sredinom karijere [28, 26], Brouwerov ton pri koncu njegove karijere kudikamo je odmjereniji. Važna je odlika [11] i povratak na neke od "mističnijih" tema s početka Brouwerove karijere.

Temeljni je pojam u [11] pojam *svijesti* – na samome početku rada, Brouwer najavljuje kako će ponuditi prikaz "faza kroz koje svijest mora proći u svome prijelazu (*transition*) iz svojega najdubljega doma (*deepest home*) prema vanjskome svijetu u kojem surađujemo i tražimo međusobno razumijevanje". Tri faze koje će Brouwer opisati gotovo se u potpunosti preklapaju s točkama koje je nabrojao u [28] i [26], a opisao, doduše bez taksonomije, već u [27] i [20]. Međutim, tek u kasnome razdoblju svoje filozofije Brouwer je eksplicitno spomenuo *svijest* kao subjekt promjene. Njegov je fokus u ranome i srednjem [28, 26] razdoblju na *čovjeku*; primjerice u [26] govori o "trima antropološkim fenomenima", dok u [18, str. 417] navodi kako se radi o "trima oblicima akcije volje za životom pojedinačnoga čovjeka" (*drei Wirkungsformen des Willens zum Leben des einzelnen Menschen)*.

Kako je pojam svijesti temeljan u Brouwerovoj pozadinskoj filozofiji, kažimo ovdje nešto o Brouwerovoj *fenomenologjiji* ili, možda bolje, njezinu *izostanku*. Naime, ako fenomenologiju shvatimo kao disciplinu posvećenu otkrivanju načinā na koji se različiti objekti (u najširem smislu riječi) pojavljuju (u) različitim oblicima svjesnoga iskustva [77, str. 8–9] ili kao disciplinu koja proučava strukture svijesti doživljene "iz prvoga lica" [78, str. 1], tada se čini posve legitimnim Brouwera okarakterizirati kao fenomenologa. Ipak, sâm Brouwer taj epitet sebi ne pridaje, a riječ "fenomenologija" upotrebljava – samo jednom.

To čini još u svojoj disertaciji, ali tek u dodataku glavnomu tekstu, u "Tvrdnjama" (*Statements*). Radi se dvadeset i jednoj točki koje je Brouwer branio zajedno s tekstom svojega doktorata. Šesta točka glasi:

> U fizici je razlika između fenomenologijskih i teorijskih razmatranja (*reasonings*) neodrživa. Posebno, ne postoji temeljna razlika između objašnjenjā svojstava plinova i tekućina pomoću molekula i onih [objašnjenjā] svojstava svjetlosti pomoću električnih (*electrical*) vibracija. [20, str. 99]

U tom navodu prije svega vidimo kako o fenomenologiji Brouwer ne govori općenito, već samo u domeni fizike. Tim više, mogli bismo tvrditi kako o "fenomenologiji" kao disciplini gore zapravo i nema govora, već kako se samo spominju "fenomenološka razmatranja", što god ona točno bila. Uzmemo li čak i da je Brouwer podrazumi(jeva)o postojanje i legitimnost te discipline, druga nam rečenica navoda, smatramo, ne pomaže mnogo u utvrđivanju njegova poimanja definicije i uloge fenomenologije. Brouwer uspoređuje dva pojedninačna objašnjenja dvaju, kažimo tako, fenomena; ne nudi dva *različita* objašnjenja (fenomenologijsko i teorijsko) *istoga* fenomena.

Takav neutvrđen i u najboljem slučaju neizravan spomen pojma "fenomenologija" smatramo ponešto problematičnim. Izbjegava li Brouwer namjerno taj termin ili pak s njime nije bio upoznat? Može biti, čini se, i da je oboje istina. Prije svega, smatramo da je razložno pretpostaviti da se Brouwer, ako ništa drugo, barem susreo s ovom rječju.

Naime, utjecaj je na Brouwerovu filozofiju izvršio nizozemski filozof G. J. P. J. Bolland, jedan od najznačajnijih nizozemskih filozofa kraja 19. i početka 20. stoljeća, gorljivi hegelijanac [41, str. 54]. Stoga je moguće, smatramo, da Brouwer pojam "fenomenologija" namjerno izbjegava kako bi svoju filozofiju "oslobodio" aluzija na (bollandovski) hegelijanizam.

S druge strane, Brouwer je svoju filozofiju najvećim dijelom iznio neovisno od Bollanda. A neovisno od Bollanda, fenomenologija od djelića Hegelova filozofijskoga sustava postaje punopravnom filozofijskom disciplinom. Misao izraženu gornjim navodom Brouwer je formulirao najkasnije 1907., kada fenomenologija, na čelu s Husserlom, još nije bila na vrhuncu popularnosti. Ipak, taj se vrhunac, početak dvadesetih godina dvadesetoga stoljeća [77, str. 7], dogodio prije najvažnijih Brouwerovih filozofijskih djela, [28], [26] i [11]. Nije li Brouwer barem čuo za Husserla?

Ne samo da jest, već su se njih dvojica sastali u travnju 1928., povodom Husserlova posjeta Nizozemskoj. Sljedećega mjeseca Husserl će u pismu Heideggeru kazati kako su mu najzanimljiviji događaji u Amsterdamu bili upravo dugački razgovori s Brouwerom [41, str. 520]. Nažalost, o tim se razgovorima ne zna ništa [4, str. 5]. Brouwer, naravno (i nažalost) u svojim radovima ne spomine Husserla, a niti, koliko nam je poznato, Husserl Brouwera.

No, postoji, takoreći, "mogući Husserl", o kojem van Atten govori u već u naslovu [2], a kasnije opširnije u [4]. To je onaj koji proučava Brouwerov intuicionizam (točnije, njegovu teoriju "izbornih nizova" (*choice sequences*) o kojima govorimo u potpoglavlju 2.10), ali ne i njegovu općenitiju teoriju izlaska svijesti. Brouwera s Husserlom uspoređuje i Posy u [73], posvećujući također veću pozornost matematici, ali i logici.

Vjerujemo, međutim, kako postoji mjesto za plodonosnu usporedbu nekih ključnih momenata Brouwerove pozadinske filozofije, tj. teorije izlaska svijesti, i Husserlove fenomenologije. Upućujemo ovdje na neke značajne razlike. U Brouwera, kako ćemo vidjeti u sljedećim dvama potpoglavljima, pojmovi *subjekta* i *vremena* nisu počelo analize, izvorni, već su, kažimo tako, konstituirani. Drugim riječima, postoji svijest koja (još) nije subjekt, kao i sadržaj ili stanje svijesti koje nije "u vremenu", tj. vremenito. Subjekt i vrijeme nastaju (tek) u prvoj fazi izlaska svijesti, a prije te faze postoji, kako ćemo vidjeti, "nulta" faza, tzv. "najdublji dom svijesti".

S druge strane, Husserl u svojoj analizi, čini se, ne ide "dublje" od subjekta. Upućujemo, primjerice, na sam podnaslov Husserlove prve meditacije: "put do transcendentalnog ego" [56, str. 51]. Nadalje, u *Meditacijama* [56, §8, str. 60] Husserl kazuje kako je *epoché* "radikalna i univerzalna metodom s pomoću koje sebe shvaćam kao čisto ja i s vlastitim čistim životom svijesti". Isto tako, u [57, §57, str. 129] Husserl "čisto Ja" naziva "transcendentalnim reziduumom". Ego ili jastvo koje ostaje nakon *epoché* Husserl u [56, §11, str. 65] naziva "transcendentalno-fenomenologijskim ja". Postavlja se, naravno, pitanje: je li za Husserla "ego" isto što i "subjekt"?

Smatramo kako jest. Potvrdu tomu nalazimo u naslovu §8 njegovih *Meditacija*: "ego cogito kao *transcendentalna subjektivnost*" [56, str. 59]. No, glavna je teza toga odlomka kako je subjektivnost (ili ego) *transcendentalna*, a ne kako je subjektivnost *ego*, pa u sadržaju odlomka ne nalazimo snažniju potvrdu potonjoj tezi. Također, u [56, §12, str. 67] Husserl, čini se, sintagme "transcendentalni ego" i "transcendentalna subjektivnost" koristi sinonimno. Makar neizravnu, potvrdu da ego jest subjekt možemo pronaći u izrazima koje Husserl koristi opisujući *intersubjektivnost*. Ovo je možda najjasnije vidljivo u *Idejama* [57, §29, str. 62], gdje Husserl o sebi i drugima govori kao o "Ja-subjektima".

Vezano uz vrijeme, izgleda da je za Husserla vremenitost također transcendentalna, tj. kako *omogućuje* fenomene, ali sama je neizvedena, "ne-omogućena". Na ovo, smatramo, ukazuje sintagma "transcendentalno vrijeme", kojom se Husserl koristi u naslovu §18 svojih *Meditacija* [56, str. 77]. Ponovno, u tekstu odlomka, ali ni kasnije, tu sintagmu ne spominje. Međutim, navodi kako "[s]vaki doživljaj posjeduje svoju doživljajnu vremenitost" [56, §18, str. 77] te kako je "[t]emeljni oblik što [...] omogućuje sve ostale sinteze svijesti [...] unutrašnja svijest vremena što obuhvaća sve" [56, §18, str. 79]. Također, u *Idejama* Husserl kazuje kako vremenitost za svaki doživljaj "označuje ne samo ono što općenito pripada svakom doživljaju, već *nužnu formu koja doživljaje povezuje s doživljajima*" [57, §81, str. 190, kurziv u originalu]. I u Brouwera je svaki *subjektivan* proces vremenit, no razlika je u tome što, kako smo najavili, Brouwer razlikuje i svijest u, kažimo tako, predsubjektnome stanju.

Upravo u tome stanju svijesti, u najdubljem domu, dijelom vidimo i razliku u Brouwerovoj, odnosno Husserlovoj *motivaciji* za teoriju svijesti. Naime, Brouwerova je motivacija značajnim dijelom religijska, mogli bismo kazati, "profetička" (usp. [61, str. 575]). To se ne očituje samo u Brouwerovu ranome djelu, [27], već i u njegovu najzrelijem filozofičnome radu, [11], gdje se vraća navodima iz Bhagavad Gite. Mogli bismo kazati, Brouwer nam želi prenijeti "transcendentalnu spoznaju", ne samo u smislu u kojem tu sintagmu koristi Husserl u §13 svojih *Meditacija* [56, str. 68], već i u onome koji je prisutan upravo u Bhagavad Giti. Što god taj smisao bio:

> Čak i ako se smatra da si najgrešniji od svih grešnika, na čamcu transcendentalne spoznaje prijeći ćeš ocean bijede. [*Bhagavad Gita* IV, 36][7]

2.2 Svijest u "najdubljem domu"

Svijest svoj put ili "izlazak" počinje u "nadubljem domu" [11, str. 480]. Taj termin Brouwer rabi isključivo u [11], no o njemu implicitno govori već u [27], i to najviše iz eshatološke perspektive, gdje za svijest u najdubljem domu rabi termin "sebstvo" (*self*). Najdublji je dom za Brouwera izvorno, "neokaljano" stanje svijesti. Poteškoća je s definiranjem svijesti u najdubljem domu svojevrsna *via negativa* – nju se najčešće opisuje prema onome što ona *nije*. Takva "negativna" karakterizacija sebstva tada uključuje pojmove iz faza ili etapa kada je svijest već napustila najdublji dom. Tim više, ona uključuje pojmove kao takve, odnosno jezik općenito, koji se javlja tek na kraju izlaska svijesti.

> Što [...] sebstvo jest, ne možemo [...] kazati, niti o njemu možemo zaključivati, jer vrlo dobro znamo da je sve govorenje i zaključivanje pažnja na velikoj udaljenosti od sebstva; da se sebstvu ne možemo približiti riječima ili zaključivanjem, već samo okretanjem u sebe kako nam je dano. [27, str. 393]

U skladu s gore navedenim, Brouwer nije definirao ni sâm najdublji dom, već je kazao kako se *čini* da "*[s]vijest* u svojem najdubljem domu oscilira sporo, bez-voljno (*will-lessly*) i povratno između mirnoće i osjeta" [11, str. 480, kurziv u originalu].

Iz Brouwerove karakterizacije svijesti u najdubljem domu možemo iščitati nekoliko važnih tvrdnji. Ponajprije, vidimo kako svijest oscilira između *mirnoće* i *osjeta*. Kako je

[7] Ovdje se koristimo engleskim prijevodom: A. C. Bhaktivedanta Swami Prabhupāda, *Bhagavad-Gitā As It Is*, The Bhaktivedanta Book Trust, Garuda, 1990.

primijetio van Atten [1], već u najdubljem domu postoje dvije vrste "sadržaja" svijesti. Svijest u najdubljem domu nije potpuna mirnoća, kako to tumači van Stigt [81, str. 136], kazujući kako Brouwer u svojoj analizi "prihvaća pretpercepcijsko stanje unutrašnjega bivanja Duše, stanje 'mirnoće', na koje još ne utječu osjeti". Složit ćemo se s van Stigtom da na svijest ne utječu *osjeti*, ali zato utječe osjet.

Na to se nadovezuje Brouwerova tvrdnja da svijest oscilira *povratno*. Pojam povratka, reverzibilnosti ili *odmicanja* bitna je značajka Brouwerove teorije svijesti, baš kao i pojam *volje*, koja u najdubljem domu izostaje. No, u ovoj fazi izlaska svijesti nemamo dovoljno pojmovnih alata da bismo ponudili jasnu karakterizaciju tih pojmova.

Stoga samo zaključno napomenimo kako ćemo riječ "osjet" u Brouwerovu opisu svijesti u najdubljem domu shvatiti u jednini. To ćemo ponovno potkrijepiti analizom kasnijih faza izlaska svijesti, no spomenimo zasad kako se naše tumačenje razlikuje od van Dalenova [35, str. 212–213], koji najdublji dom opisuje kao stanje "nediferenciranoga kaosa", gdje "osjeti nekontrolirano dolaze i odlaze" te van Attenova i Tragesserova koji u [7] osjete u najdubljem domu spominju u množini.

2.3 Prva faza izlaska svijesti

Odmah nakon gore citirane rečenice o svijesti u najdubljem domu, Brouwer opisuje prvu fazu izlaska svijesti.

> I čini se kako samo status osjeta dopušta početni fenomen [...] prelaska. Ovaj je početni fenomen *protok vremena*. Protokom vremena sadašnji osjet ustupa mjesto drugomu sadašnjemu osjetu, na način da svijest zadržava prijašnji osjet kao prošli, i, nadalje, tim razlikovanjem između prošlosti i sadašnjosti, odmiče se (*recedes*) od obaju i od mirnoće i postaje *umom*. Kao um zauzima funkciju subjekta koji doživljava sadašnji i prošli osjet kao objekt. I opetovanjem ovoga fenomena dvojstva, objekt se može proširiti na svijet osjetā raznovrsne mnoštvenosti. [11, str. 480, kurziv u originalu]

Tim jezgrovitim opisom Brouwer uvodi mnoštvo termina koji nam prije svega pomažu da povratno shvatimo pojam najdubljega doma i svijesti u njemu. Tranzicijom ili "izlaskom" iz nadubljega doma svijest se stubokom mijenja, u njoj se pojavljuju novi momenti. "Početni fenomen prelaska" prva je faza izlaska svijesti, koju Brouwer naziva i "naivnom fazom" [11, str. 483].

Počnimo analizom sintagme "status osjeta". Kako smo naveli ranije, osjet postoji već u najdubljem domu. No, sada možemo vidjeti što u najdubljem domu *ne postoji* – vrijeme.

Stoga ćemo tvrditi da Brouwer na početku navoda govori o *promjeni statusa* osjeta, koji sada ima novu, vremensku dimenziju. Van Atten u [1] tu sintagmu tumači nešto drukčije. Za njega je "status osjeta" *stanje* svijesti. Upozorava kako Brouwer termin "osjet" rabi dvoznačno – kada osjet spominje prije pojave vremena, o njemu govori kao *stanju* svijesti, dok nakon opisa vremena o osjetu misli kao o *sadržaju* svijesti. Tu dvoznačnost van Atten ne smatra problematičnom, kazujući kako je po njemu biti u statusu osjeta isto što i imati "osjet(e)" [1, str. 75] kao sadržaj svijesti. Mi ćemo se složiti da se radi o dvoznačnosti, ali ne i da su navedena dva značenja istovjetna.[8]

Zaista, osjet u najdubljem domu i osjet po izlasku iz najdubljega doma nemaju ista svojstva. Kako smo tvrdili ranije, osjet u najdubljem domu shvatili smo u jednini. Sada tu tvrdnju možemo i potkrijepiti Brouwerovom tezom kako se po izlasku iz najdubljega doma javlja "svijet osjetā raznovrsne mnoštvenosti". Osjet je u najdubljem domu jedan, opći, nediferencirani osjet, za razliku od *mirnoće*. Početkom tranzicije ili prelaska osjet se može usporediti s *drugim* osjetima. Možemo dakle, kao posljedicu van Attenove analize, "status osjeta" shvatiti i kao promjenu statusa osjeta i kao promjenu značenja riječi "osjet".

Početni fenomen izlaska svijesti jest *protok vremena*. U [18, str. 417] Brouwer taj fenomen naziva "vremenskom pozornošću" (*zeitlischen Einstellung*), dok u [26, str. 418] govori o "svjesnosti vremena" (*becoming-aware-of-time*). Valja spomenuti da Brouwer protok vremena spominje u jednini. Stoga nam je za početni fenomen dovoljna svijest samo o jednome protoka vremena, onoga između dvaju osjeta, a ne svjesnost protokā vremena, ili vremena kao takvoga.

Kod Brouwera je svjesnost vremena neodvojiva od osjetā kao sadržaja svijesti. Pogledajmo stoga kakav je odnos dvaju osjeta koje svijest doživljava, odnosno što ih u svijesti čini odvojenima. Čini se kako u gornjem navodu Brouwer kao jedinu razliku među osjetima navodi njihov vremenski poredak. S druge strane, u [28] i [26] kazuje kako se osim po vremenskome poretku osjeti razlikuju i po kvaliteti. Nije posve jasno zašto Brouwer u [11] izostavlja uvjet kvalitativne razlike između prvoga sadašnjega i drugoga sadašnjega osjeta. Time ostavlja otvorenim pitanje primata između razlike u kakvoći i razlike u količini osjetā, odnosno odnosa vremena i promjene. Može li jedan sadašnji osjet ustupiti mjesto drugomu, kvalitativno jednakomu osjetu? Tim više, u [20, str. 61] Brouwer govori o "vremenu kao promjeni *per se*", stoga izgleda kako postoji treća mogućnost. Mi ćemo se odlučiti za tumačenje blisko van Attenovu [1, str. 72], koji navodi kako je sa svakim osjetom povezan (*associated*) drukčiji trenutak u vremenu.

[8] Uostalom, kada bi značenja bila istovjetna, ne bi se radilo *dvoznačnosti*, već možda samo o *dvosmislenosti*. Van Atten rabi termin "ambiguity", koji je pak sam po sebi barem dvosmislen.

Kažimo ovdje nešto o “fenomenu dvojstva”. Taj smo pojam spomenuli u Uvodu, iznoseći Brouwerovu definiciju matematike. No, dvojstvo se, kako vidimo, izvorno pojavljuje unutar Brouwerove filozofije svijesti. Fenomen dvojstva mogućnost je svijesti da kao svoj sadržaj ima dva osjeta, koji se razlikuju po vremenskome poretku. Prošli osjet, koji je jednom bio sadašnji, sada ustupa mjesto sadašnjemu, ali biva zadržan u svijesti. Sličnu formulaciju nalazimo i na drugim mjestima; kako smo vidjeli u Uvodu, Brouwer u [16, str. 510, kurziv dodan] protok vremena definira kao “raspadanja trenutka života u *dvije* različite stvari, od kojih jedna ustupa mjesto drugoj, ali zadržana je u pamćenju”.

Pojam pamćenja Brouwer u [11] ne spominje. Osim u [16], Brouwer o memoriji govori u [28] i [26], ponovno u okviru opisa vremenske pozornosti. Tomu nećemo pridavati velik značaj, već ćemo ustvrditi kako je u navodu koji analiziramo Brouwer pojam sjećanja implicirao, kazujući da svijest prošli osjet “zadržava kao prošli”

Pojam *uma* jedan je od najvažnijih, ako ne i najvažniji pojam Brouwerove filozofije. Najprije jedna opaska o prijevodu. Brouwer u [11], djelu pisanome na engleskome jeziku, rabi termin “mind”, koji se u nas obično prevodi kao “um”. S druge strane, pišući na nizozemskome i njemačkome koristi se terminima “intellect” i “Intellekt”, što bi odgovaralo hrvatskoj riječi “razum”. Komparativnom analizom izvornih radova uspostavlja se da Brouwer misli na isto. Tim više, ne razlikuje u svojoj filozofiji, koliko nam uspijeva iščitati, um i razum. Mi smo se odlučili za izbor kasnijega termina. Vjerujemo kako govor o umu, a ne o razumu, baca pravo svjetlo na neke važne dijelove [11], poput pitanja drugih umova i matematike kao tvorevine uma.

Brouwer nam kazuje kako svijest pomoću vremenske svjesnosti *postaje* umom. U [28] i [26] Brouwer taj pojam ne spominje eksplicitno, već o protoku vremena govori kao o “temeljnome intelektualnome fenomenu” [str. 45] [str. 418]. Mogućnosti uma su mnogobrojne, kako ćemo vidjeti analizom nekih drugih dijelova [11], ali možda je najvažnija da se distancira, odmakne od svojega sadržaja. Svijest kao um postaje svijest koja misli “nešto različito” [23, str. 108]. Um poprima funkciju *subjekta* koji dvojstvo misli kao *objekt*.

Odvajanje uma od njegova sadržaja možda je bolje opisano u [28] i [26]. Primjerice, u [26, str. 418] Brouwer navodi kako je moment raspadanja trenutka života, odnosno trenutak nastanka dvojstva “manje-više odvojen od Jastva (*Ego*) i smješten u zaseban svijet, svijet percepcije”. Formulacija u [28] je gotovo identična, uz to što prilog “manje-više” izostaje. Ovu, na prvi pogled sitnu razliku u formulaciji nećemo zanemariti, već ćemo je nešto kasnije istražiti u okviru pojma “jastvenosti”. “Svijet percepcije” iz [28] i [26] te “objekt“ i “svijet osjetā raznovrsne mnoštvenosti” iz [11] shvatit ćemo kao sinomine, suprotstavljene subjektu. U najdubljem domu svijest nije odvojena od osjeta, možemo kazati da svijest *jest* ili mirnoća ili osjet. Svijest se prvom fazom svojega izlaska *odmiče*, kako od osjetā, tako od mirnoće. Pojavom uma mirnoća nestaje, a različiti osjeti postaju predmet misli. Drugim riječima, umom nastaje *intencionalnost* [5, 71].

Fenomen dvojstva se može opetovati, tvoreći "svijet osjetā raznovrsne mnoštvenosti". U [26, str. 418] i [28, str. 45] Brouwer ne govori o opetovanju, već o "samoodmatanju (*self-enfolding, Selbstentfaltung*) temeljnoga događaja uma". Van Atten u [1, str. 72] to opetovanje prikazuje na sljedeći način:

1
2 (1)
3 (2 (1)).

Gornji prikaz odgovara opisu koji nalazimo u [28], gdje Brouwer kazuje kako vremensko dvojstvo može biti uzeto kao element novoga dvojstva. Time dobivamo vremensko "trojstvo".

No, u [26], gdje je protok vremena opisan kao "raspadanje trenutka života", Brouwer daje nešto drukčiju formulaciju, kazujući kako se *jedan element* dvojstva ponovno može raspasti na dva dijela, čime dobivamo trojstvo ili vremenski niz od triju elemenata. Takva formulacija ima nešto različite implikacije. Opetovanjem, kako vidimo iz van Attenova prikaza, dolaze novi elementi, novi osjeti, pa govorimo o nekoj vrsti sinteze. Ako se pak, za razliku od opetovanja, jedan element rastavi u dva, tada je riječ o analizi. Dvojaku karakterizaciju opetovanja fenomena dvojstva primjećuje i van Stigt [81, str. 305–306]. Raspadanjem ili pak spajanjem osjetā um je sposoban stvoriti "svijet osjetā raznovrsne mnoštvenosti" ili, terminologijom iz [28] i [26], svijet percepcije. Time smo završili analizu gornjega navoda. Sada iznosimo dio teksta koji se na taj navod neposredno nadovezuje, kako bismo mogućnosti uma podvrgnuli daljnoj analizi.

2.4 "Jastvenost", "otuđenost", želja i zazor

> U mjeri nepovratnosti kojom se subjekt odmakao (*receded*) od elementa objekta, taj element gubi svoju jastvenost (*egoicity*), tj. biva otuđen (*estranged)* od subjekta, i u mjeri te otuđenosti, um postaje disponiran za želju i zazor (*apprehension*), i, posljedično za pozitivnu ili negativnu konativnu aktivnost prema obziru na element u pitanju. [11, str. 480]

Tim navodom Brouwer iznosi svoje specifično poimanje odnosa subjekta i objekta. Analizom prethodnoga navoda ustanovili smo kako se svijest izlaskom iz najdubljega doma *odmiče* od osjetā te ih smješta u zaseban svijet. Sada vidimo kako odmak ne mora biti potpun, subjekt se od elementa objekta ne mora odvojiti u potpunosti, što ima široke implikacije kako za poimanje svijesti i subjekta, tako i za poimanje svijeta koji taj subjekt misli. U našoj ćemo analizi najprije pozornost posvetiti samomu subjektu, odnosno njegovu odmaku od elementa objekta i mjeri toga odmaka. Potom ćemo reći nešto o elementima objekta, odnosno njihovim svojstvima "jastvenosti" i "otuđenosti". Završit ćemo analizom pojmova želje i zazora.

Kažimo najprije što je "element objekta", budući da Brouwer tvrdi kako se subjekt od toga elementa odmiče. Kako smo vidjeli ranije, opetovanjem dvojstva, *objekt* se širi te postaje svijet osjetā raznovrsne pluralnosti. Objekt je stoga čitav svijet osjetā ili svijet percepcije subjekta. Dijelom zbog Brouwerova izbora riječi "element", mi ćemo svijet osjetā ili objekt shvatiti kao skup svih osjeta nekoga subjekta. Tada bi elementi toga skupa bili naprosto – osjeti. Ipak, svijet osjetā ima bitnu vremensku dimenziju. Radi se o skupu koji za (ljudskoga) subjekta nikada nije dovršen, on stalno raste nadolaskom novih osjeta koji su "individuirani" [1, str. 71] svakim novim trenutkom. Dodajmo također da ćemo elementom objekta smatrati i neki podskup skupa svih osjeta koji se sastoji od više osjeta, ali također i čitav skup osjeta, odnosno čitav objekt. Preciznije, element objekta shvatit ćemo kao nepravi podskup skupa svih osjeta u danome trenutku ili kao element partitivnoga skupa svih osjeta u danome trenutku.

Sada kada znamo od čega se točno subjekt odmiče, posvetimo se samomu pojmu odmaka subjekta od elementa objekta. Odmak, kazuje Brouwer, može biti u nekoj mjeri nepovratan ili ireverzibilan. Ovdje se možemo zapitati: Zašto Brouwer govori o mjeri "nepovratnosti", a ne o mjeri "povratnosti"? Odgovor na to pitanje vidimo pri kraju navoda, u pojmovima želje i zazora. Čini se kako je Brouwerova namjera bila definirati dispoziciju za želju i zazor te posljedičnu pozitivnu ili negativnu konativnu aktivnost. Za to mu je pak bio potreban pojam "otuđenosti". Kako bi definirao otuđenost, govori o "nepovratnosti" odmaka. Stoga možemo zaključiti kako, uz mjeru nepovratnosti, postoji i mjera povratnosti odmaka. Brouwer je mogao kazati da "u mjeri povratnosti kojom se subjekt odmakao od elementa objekta, taj element gubi svoju otuđenost".

Uvevši mjeru povratnosti odmaka, pogledajmo kakav je njezin odnos prema mjeri nepovratnosti. Na prvi se pogled čini kako se radi o obrnuto proporcionalnim količinama: Rastom mjere povratnosti odmaka subjekta od elementa objekta smanjuje se mjera nepovratnosti toga odmaka i *vice versa*. Označimo mjeru povratnosti odmaka s x, a mjeru nepovratnosti odmaka s y. Odnos obrnute proporcionalnosti ovih dviju mjera tada bi odgovarao formuli $y = \frac{k}{x}$. Ipak, mjera nepovratnosti i mjera povratnosti ne mogu rasti u nedogled, one imaju gornju i donju granicu. Naime, Brouwer u [11, str. 480] govori o "potpunoj otuđenosti". Reći da je element objekta potpuno otuđen tada bi značilo da je njegova mjera povratnosti 0, što bi gornju formulu učinilo nesuvislom. Stoga ćemo odnos povratnosti i nepovratnosti odmaka mjeriti otvorenim intervalom od 0 do 1 te predočiti jednostavnom formulom $y = 1 - x$.

Imajući na umu da se odmak može izraziti gornjom formulom, možemo se sada zapitati koja je mjera nepovratnosti odmaka subjekta od mirnoće i prvih dvaju osjeta, odmaka kojim je započeo izlazak svijesti iz najdubljega doma i nastao um? Naime, Brouwer taj odmak samo spominje, ali ne navodi njegovu mjeru nepovratnosti. Nešto detaljnijom analizom [11] pokazuje se kako se možda radi o nelegitimnome pitanju. Naime, kada po prvi put govori o odmaku, Brouwer govori o *svijesti* koja se odmiče te tako postaje umom. Tek kao um, svijest poprima funkciju subjekta, a gornja formula opisuje odmak *subjekta* od elementa objekta. Nadalje, svijest se pri izlasku iz najdubljega doma odmiče i od *mirnoće*, koja ne može biti element objekta, jer ustanovili smo kako elementi objekta mogu biti samo osjeti. Ipak, to pitanje čini se legitimnim u svjetlu analize Brouwerovih filozofičnih radova iz srednjega razdoblja [28, 26].

Prisjetimo se kako smo ranije uputili na sitnu ali značajnu razliku u formulaciji odvajanja (*separation*) Jastva i svijeta percepcije između [28] i [26]. Dvojstvo je od Jastva u [28] odvojeno naprosto, dok je u [26] *više-manje* odvojeno. Brouwer je između [28] i [26] svoju filozofiju rafinirao; primjerice, pojam jastvenosti uvodi tek u potonjem radu, gdje dodaje sljedeću rečenicu: "[o]bjekti se široko razlikuju po svojem stupnju jastvenosti ili usmjerenosti na Sebstvo, tj. stupnju u kojem je želja za njihovom stabilnošću prihvaćena kao vodeća snaga slobodne volje" [26, str. 418]. Također, u [28] Brouwer kazuje kako se nastankom objekata svijet percepcije stabilizira, dok u [26] ponovno modificira svoju tezu, kazujući kako se nastankom objekata svijet percepcije *više-manje* stabilizira. Napomenimo kako se pojmovi "objekata" (što treba razlikovati od "objekta" u jednini u [11]) i "slobodne volje" u radovima iz Brouwerove srednje faze javljaju tek u drugoj fazi izlaska svijesti, pa ih stoga zasad nećemo analizirati.

Dakle, čini se da Brouwer u [26] kazuje kako se subjekt u nekoj, većoj ili manjoj mjeri nepovratnosti odvaja ili odmiče već od svojih prvih dvaju "vremenskih" osjeta, odnosno od dvojstva. U tome radu prvo dvojstvo nema poseban status, kao što se to čini da ima u [11]; Brouwer govori o Jastvu koje se (u nekoj mjeri) odvaja, a ne o svijesti, koju u [26] i [28] i ne spominje. Time već pretpostavlja razliku subjekt-objekt, kao i um, jer o nastanku dvojstva govori kao o "temeljnome intelektualnome fenomenu" [28, str. 45] i "temeljnome intelektualnome događaju" [26, str. 418]. Zaključit ćemo stoga kako Brouwer u [11] nije htio kazati kako se od prvih dvaju osjeta subjekt odmiče nepovratno, apsolutno ili *simpliciter*, niti je htio kazati da se od prvih dvaju osjeta subjekt *qua* subjekt ne može ni u kojoj mjeri nepovratnosti odmaknuti, budući da nastaje zajedno s tim osjetima. Tvrdit ćemo radije da se subjekt od svojih prvih dvaju osjeta, time što su ti osjeti element objekta, može odmaknuti u ovoj ili onoj mjeri nepovratnosti.

Vidjevši kako mjera nepovratnosti odmaka subjekta može za bilo koji element objekta biti veća ili manja, istražimo način njezina *mjerenja*. Kako smo ranije ustvrdili, objekt ili svijet osjetā neprestance raste nadolaskom novih osjeta; sa svakim osjetom povezan je novi trenutak u vremenu [1]. Stoga je subjekt u svakome novome trenutku, u svakome novome "sada" izložen novim elementima objekta. Jedno tumačenje koje nam se čini plauzibilnim jest da se subjekt u svakim idućim trenutkom od elementa objekta ili odmiče ili ne odmiče. Stoga, iako je odmak u svakome pojedinome trenutku diskretan, on se mjeri *vremenom*. Uzmimo kao primjer neki element objekta α i 10 trenutaka u kojima se taj element javlja u svijetu subjekta. Pretpostavimo nadalje da se subjekt u 6 trenutaka od α odmaknuo, dok se u ostalih 4 trenutaka nije nije odmaknuo. Tada bi mjera nepovratnosti odmaka subjekta od α u trenutku broj 10 bila 0.6.

Drukčije tumačenje koje se također čini plauzibilnim jest da odmak u svakome trenutku ne mora biti diskretan. Čini se da u prilog tomu tumačenju govori navod iz [26] kojega smo iznijeli ranije, gdje Brouwer već u prvome trenutku kazuje kako se subjekt više-manje odmiče od dvojstva. Izgleda kako je mjera nepovratnosti odmaka od dvojstva poznata i prije negoli se subjekt u kasnijim trenutcima imao priliku od toga dvojstva (dodatno) odmaknuti ili mu se *primaknuti*. Prema ovoj interpretaciji, mjera nepovratnosti ovisi o prirodi ili sadržaju elementa objekta u pitanju. Govoreći o više-manje odvojenome dvojstvu u [26], Brouwer ne navodi o kojim se točno osjetima radi, pa je možda upravo kvaliteta osjeta ono što određuje u kolikoj će se mjeri nepovratnosti subjekt od njega odmaknuti. Možemo zamisliti i treću interpretaciju, koja bi spojila prve dvije, mjereći nepovratnost odmaka vremenom, kao i prirodom, sadržajem ili kvalitetom elementa objekta u pitanju.

Obratimo sada pozornost elementima objekta od kojih se subjekt odmiče. Za koju se god od triju po nama mogućih interpretacija odmaka odlučili, u toj mjeri, prema Brouweru, taj element gubi svoju jastvenost ili biva otuđen od subjekta. Iz ovoga odmah možemo nešto zaključiti o odnosu tih dvaju svojstava. Mjera otuđenosti nekoga elementa objekta jednaka je mjeri gubitka jastvenosti tog elementa. Ta mjera je pak jednaka mjeri nepovratnosti odmaka subjekta od elementa objekta u pitanju. Kako smo gore ustanovili, mjera nepovratnosti odmaka i mjera povratnosti odmaka nisu obrnuto proporcionalne. Mjera povratnosti odmaka odgovara mjeri jastvenosti. Stoga ni jastvenost i otuđenost nisu obrnuto proporcionalne veličine. Njihov se odnos također može opisati formulom $y = 1 - x$. Neka je x mjera jastvenosti, a y mjera otuđenosti. Vrijednosti x, y nalaze se unutar intervala $[0, 1]$.

Brouwer nam u [11] ne nudi dodatna pojašnjenja svojstava jastvenosti i otuđenosti. Definiciju jastvenosti iznosi u [26]. Mi smo je već citirali, ali u drugome kontekstu. Stoga sada ponavljano: [o]bjekti se široko razlikuju po svojem stupnju jastvenosti ili usmjerenosti na Sebstvo, tj. stupnju u kojem je želja za njihovom stabilnošću prihvaćena kao vodeća snaga slobodne volje" [26, str. 418]. Napominjemo još jednom kako se "objekti" u [28] i [26] razlikuju od "objekta" i "elementa objekta" u [11]. Objekti su produkt druge faze izlaska svijesti, takozvane "uzročne pozornosti". Pojam slobodne volje u [11] nalazimo također tek u drugoj fazi. Stoga ćemo o tim pojmovima detaljnije govoriti u sljedećem potpoglavlju. Zasad kažimo samo kako se radi o značajnoj razlici između [26] i [11]: u prethodnome djelu Brouwer jastvenost smješta u drugu fazu izlaska svijesti, dok u potonjem o jastvenosti govori već u prvoj fazi. Uzmimo stoga da Brouwer u definiciji govori o elementima objekta, a ne o objektima. Radi boljega razumijevanja svojstava jastvenosti i otuđenosti, kažimo ovdje kako su *stvari* u vanjskome svijetu *potpuno otuđeni* elementi objekta.

Sada se, u svjetlu definicije jastvenosti, možemo zapitati: čemu se subjekt *primiče* odmičući se od elementa objekta? Primiče se, čini se, Sebstvu. Nije posve jasno zašto Brouwer rabi termin "Sebstvo" (*Self*), a ne "Jastvo" (*Ego*), budući da potonji termin u [26] rabi nešto ranije, kada govori o većem ili manjem odvajanju *Jastva* od dvojstva. Etimološki bi jastvenost svakako bilo bolje definirati kao "stupanj usmjerenosti na Jastvo"; stupanj usmjerenosti na Sebstvo po tome bi principu bio "sebstvenost".

Uzmimo da Brouwer u [26] Sebstvo smatra sviješću u najdubljem domu, odnosno da taj termin u [26] i [27] upotrebljava u istome smislu. Tada je od velikoga značaja navod iz potonjega rada, u kojem se Brouwer obraća, takoreći, prosviježenomu čitatelju, onomu koji se okrenuo k sebi ili u sebstvo. Za njega stvarnost "nije više [...] odvojena od sebstva, već usmjerena iz sebstva i sa sebstvom" [27, str. 394]. Ovdje ćemo ostaviti postrani "moralistički" i eshatološki ton prisutan u [27], pretpostavivši da o sebstvu možemo govoriti i bez brouwerovskoga iskustva "okretanja u sebe". Za razliku od definicije jastvenosti iz [26], u [27] Brouwer govori o "stvarnosti" (*reality*), a ne o nekome njezinu dijelu ili elementu, kazujući kako je čitav svijet subjekta usmjeren iz sebstva te da svaki njegov element sa sobom nosi dio toga sebstva. “Količinu sebstva” koju nosi neki element objekta razumjet ćemo kao stupanj ili mjeru jastvenosti toga elementa objekta.

Izgleda kako jastvenost sada možemo tumačiti u širem okviru okretanja u sebe ili sebstvo. Okrenuti se možemo u sebe *simpliciter*, ali i *od nečega* prema sebi. “Uspješnost” našega okretanja u sebe od nečega, odnosno stupanj u kojem smo se okrenuli u sebstvo od elementa objekta, govori nešto o tome elementu, s “koliko sebstva” on je usmjeren ili kolika je njegova jastvenost. Na početku potpoglavlja smo naveli smo kako element objekta može biti čitav objekt, odnosno svi osjeti subjekta. Možemo sada istražiti poseban slučaj, onaj u kojem se subjekt potpuno ili nepovratno odmakao od svih elemenata objekta. Tada bi, čini se, nestala razlika subjekt-objekt. Ako se subjekt odmakao od čitavoga objekta, tada su svi elementi toga skupa potpuno u “ja” i više nema objekta od kojega bi se subjekt razlikovao.

Međutim, možda Brouwer u definiciji jastvenosti iz [26] “Sebstvo” poima drukčije nego u [27]. U prilog tomu govori činjenica da u toj definiciji Brouwer spominje slobodnu volju i želju, koje nisu karakterisitka sebstva ili svijesti u najdubljem domu, već uma. Kako smo vidjeli, u najdubljem domu svijest oscilira *bez-voljno* [11, str. 480]. Dodatan razlog je etimološki. Stoga izgleda kako je Brouwer htio govoriti o usmjerenosti na Jastvo. Uzevši to tumačenje kao legitimo, recimo nešto o Sebstvu *vis-à-vis* Jastva. Brouwer oba termina rabi u [26], pa nećemo dovoditi u pitanje njihovu razliku u značenju; spornom smatramo samo upotrebu riječi “Sebstvo” u definiciji jastvenosti. Sebstvo u [28] i [26] Brouwer ne definira, pa ćemo pretpostaviti da ga uzima kao sinonim za svijet u najdubljem domu u [11]. Ni Jastvo u [28] i [26] Brouwer ne definira, no ono je po svoj prilici isto što i “subjekt” u [11], um koji se suprotstavlja objektu. Jastvo nastaje nakon Sebstva, napuštanjem najdubljega doma i uvođenjem razlike subjekt-objekt.

Stoga bismo jastvenost mogli razumjeti naprosto kao “subjektivnost”, kako to čini van Dalen u [35] i [36]. Elementi objekta s visokim stupnjem jastvenosti subjektivni su u svakodnevnome smislu. Njima su suprotstavljeni objektivni elementi objekta, “najobjektivniji” među kojima su stvari u vanjskome svijetu. Van Dalen navodi kako jastvene objekte možemo pronaći u “subjektivnim područjima života” [35, str. 213], navodeći kao primjer umjetnost i religiju. Makar se *prima facie* čini plauzibilnim, to je tumačenje opovrgnuto, smatramo, jednim posebnim “područjem” na koje Brouwer primjenjuje pojam jastvenosti. Kako ćemo vidjeti uskoro, u drugoj fazi izlaska svijesti jastvenom za subjekt Brouwer naziva i “dušu nekoga [drugoga] ljudskoga bića” [11, str. 480]. O van Dalenovu tumačenju jastvenosti više ćemo govoriti kasnije, budući da taj pojam on analizira u okviru svih faza izlaska svijesti.

Vratimo se sada na spornu upotrebu riječi “Sebstvo” u Brouwerovoj definiciji jastvenosti u [26]. Najprihvatljivijom nam se čini opcija prema kojoj Brouwer nakraju Sebstvo u definiciji jastvenosti ipak poima kao svijest u najdubljem domu, ali time ne želi kazati da je to Sebstvo sposobno išta željeti ili kako ima slobodnu volju. On je naprosto iznio nepotpunu definiciju. Po nama, ono što je htio kazati jest da se “objekti široko razlikuju po svojem stupnju jastvenosti ili usmjerenosti na Sebstvo, tj. stupnju u kojem je *od strane Jastva* želja za njihovom stabilnošću prihvaćena kao vodeća snaga slobodne volje”. No, ni ta interpretacija nije bez svojih poteškoća. Rekli smo kako Jastvo nastaje nakon Sebstva, no preciznije bi bilo kazati kako ono nastaje *iz* Sebstva. Sebstvo je prije uma, a um poprima funkciju Jastva. Ako Sebstvo pojavom Jastva nestaje, nije jasno kako elementi objekta Jastva mogu biti usmjereni na nešto čega više nema. Mogući je odgovor da Sebstvo ne nestaje, već samo *ostaje* – u najdubljem domu.

Možemo dakle govoriti o četirima međusobno definirljivima pojmovima: mjeri povratnosti odmaka, mjeri nepovratnosti odmaka, mjeri jastvenosti i mjeri otuđenosti. Prva dva pojma pripisuju se subjektu jer je mogućnost odmaka svojstvo subjekta, ali o odmaku se uvijek govori kao o odmaku *od* nečega, točnije od elementa objekta. Možemo reći da se radi o relaciji između subjekta i elementa objekta ili još bolje, o skupu relacija. Druga dva pojma pripisuju se elementu objekta. Na prvi pogled jastvenost i otuđenost izgledaju kao svojstva elemenata objekta, no ona se opet definiraju prema obziru na subjekt, pa ih možemo smatrati *relacijskim svojstvima*. Mjera jastvenosti elementa objekta istovjetna je mjeri povratnosti odmaka subjekta od elementa objekta, dok je mjera otuđenosti elementa objekta istovjetna mjeri nepovratnosti toga odmaka.

Nastavimo sada s analizom preostalih pojmova u izdvojenome navodu. U mjeri otuđenosti, kazuje Brouwer, um postaje disponiran za *želju* i *zazor*. U [27] i [80] Brouwer se umjesto zazora koristi nešto snažnijim pojmom “straha”. Ovdje ćemo želju i zazor poimati kao *emocije.*Tim emocijama Brouwer daje posebnu važnost. Na nekim mjestima čak se čini kako ih smatra *jedinim* emocijama. Primjerice, u [80, str. 395] govori o “emocionalnome sadržaju” kao o stupnju u kojem se objekata plašimo ili ih priželjkujemo. Ipak, u drugim radovima rabi izraze koji se također mogu svrstati pod emocije. U [11] govori o još “vokaciji”, “inspiraciji”, “raspoloženju” (*mood*) i “ćudi” (*temper*), “radosti” i “bolu”. Iz gornjega navoda vidimo kako se želja i zazor javljaju kao dispozicije *uma*. Buduća da um (koliko zasad znamo) kao svoj sadržaj može imati samo osjete, shvatit ćemo želju i zazor, ali i druge emocije, kao osjete. Priklonit ćemo se time van Attenovu tumačenjem [1], prema kojem osjeti ne moraju nužno dolaziti od osjetila. Van Atten kao potvrdu takvoga poimanja navodi Brouwerovo spominjanje “osjetā vokacije i inspiracije” [11, str. 481].

Osjetima želje i zazora Brouwer daje posebno mjesto ponajprije jer ih u svojim definicijama usko vezuje uz svojstvo uma da kao subjekt misli *nešto drugo*, da se odvoji od elementa objekta. U [23, str. 107] odvajanje subjekta i objekta Brouwer naziva "nereligioznim odvajanjem", koje "potječe od temeljnoga grijeha zazora ili želje". Vidimo ondje nešto drukčiju formulaciju, Brouwer okreće "pojmovni redoslijed", kazujući kako razlika subjekt-objekt proizlazi od želje i zazora. Iz te formulacije mogli bismo zaključiti da se želja i zazor javljaju i prije nastanka uma, budući da um svojim nastankom poprima funkciju subjekta. Mi ćemo ipak odlučiti voditi se opisom iz [11], gdje Brouwer sugerira kako se želja i zazor javljaju *istovremeno* s nastankom uma.

Prema elementima objekta od kojih se udaljio ili otuđio, prema onome što poima kao "nešto različito" [23, str. 107], subjekt može osjećati želju i zazor, i to upravo *u mjeri otuđenosti* od elementa objekta u pitanju. Nadalje, dispozicija za te emocije time je veća što je element otuđeniji. Što je pak element otuđeniji, to je manje jastven. Stoga se čini da Brouwer u [11] i [23] smatra da prema potpuno jastvenim osjetima ili složevinama osjetā ne možemo osjećati ni želju ni zazor. Uzmimo primjer neke složevine osjetā, sastavljene od nekoliko jastvenih i nekoliko otuđenih osjeta. Ta je složevina mogući objekt želje i zazora samo onoliko koliko je otuđena, a to ovisi o omjeru broja jastvenih i otuđenih osjeta od kojih se sastoji.

Međutim, Brouwer u [26] navodi na drukčije tumačenje, definirajući ondje stupanj jastvenosti ili usmjerenosti na Sebstvo kao "stupanj u kojem je *želja* za njihovom stabilnosti prihvaćena kao vodeća snaga slobodne volje". Ovdje se tvrdi da želja ovisi o stupnju jastvenosti, tim više, stupanj želje *jest* stupanj jastvenosti. Znakovito je da Brouwer u [26] ne govori o zazoru, što može biti upravo iz razloga što u tome djelu još ne uvodi pojam otuđenosti, koji spominje isključivo u [11]. Da je taj pojam uveo u [26] , Brouwer bi možda kazao da veća otuđenost povlači veći stupanj zazora. Uzmimo neki element objekta koji je u nekoj mjeri jastven. Sada slijedi da taj element objekta subjekt želi u onoj mjeri u kojoj je taj element jastven, a od njega zazire u onoj mjeri u kojoj je taj element otuđen.

U Brouwerovim ostalim radovima, nažalost, ne nalazimo dodatna objašnjenja jastvenosti i otuđenosti vis-à-vis želje i zazora kojima bismo mogli posve odrediti za koju se od dvije navedene interpretacije odlučiti. Obje se čine jednako legitimnima. Dodajmo kako prema potonjoj interpretaciji, smatramo, Brouwer iznosi psihologijsku tvrdnju, objašnjavajući na čemu se temelji želja ili *zašto* subjekt želi neki element objekta. Prema prvome tumačenju Brouwer ne objašnjava na temelju čega se javljaju želja i zazor, već specificira, takoreći, njihovu domenu. Ta su domena barem unekoliko otuđeni osjeti. Ovdje, čini se, za razliku od druge interpretacije, subjektu ostaje prostor da isti element objekta sada želi više, a sada manje ili da mjera u kojoj od elementa objekta zazire bude promijenjena.

Ovdje ćemo se odlučiti za tumačenje odnosa želje i zazore prema jastvenosti i otuđenosti na temelju Brouwerova kasnijega djela, [11]. Također, smatramo kako se radi o plodonosnijoj interpretaciji. U ponešto pojednostavljenome, binarnome prikazu, svijet osjetā sastoji se od dviju vrsta osjetā: jastvenih i i otuđenih. Otuđeni osjeti dijele se na one koje subjekt želi i one od kojih zazire. Dodatno, ovdje smo, takoreći, dispozicije aktualizirali – dispoziciju za želju ili zazor pretvorili smo u želju ili zazor naprosto.

Konačno, i ponovno nažalost, u Brouwerovim tekstovima ne nalazimo pojašnjenje "konativne aktivnosti", kojom završava navod izdvojen na početku ovoga potpoglavlja. O njoj Brouwer kazuje još kako se, i to u drugoj fazi izlaska svijesti, "razvija iz spontanoga truda u predumišljajno poduzeće (*forethinking enterprise*)" [11, str. 481]. Poduzimanje se događa tek u drugoj fazi, stoga izgleda kako Brouwer tvrdi da je konativna aktivnost u prvoj fazi izlaska svijesti na razini "spontanoga truda". Iz izdvojenoga navoda vidimo još kako konativna aktivnost može biti pozitivna ili negativna, a to je pak *posljedica* dispozicije za želju ili zazor. Smisleno izgleda želju povezati s pozitivnom, a zazor s negativnom konativnom aktivnošću.

Posljednje što Brouwer navodi o ovome pojmu jest kako su i pozitivna i negativna konativna aktivnost "uglavnom usmjerene prema stvarima" [11, str. 481], za koje smo kazali da su potpuno otuđeni elementi objekta, ali o njima ćemo detaljno govoriti u sljedećem potpoglavlju. Zaključimo o konativnoj aktivnosti nakraju da, ako je u prvoj fazi na razini spontanoga truda, nadamo se da izostankom objašnjenja njezinoga značenja nismo nanijeli veliku štetu razumijevanju izlaska svijseti. Ako se pak konativna aktivnost u drugoj fazi razvija u "poduzeće" ili djelovanje, nadamo se da ćemo je posljedično objasniti kasnijim opisom "uzročnoga djelovanja".

2.5 Druga faza izlaska svijesti

Sada na red dolazi druga faza izlaska svijesti, koju Brouwer naziva "izoliranom uzročnom fazom" [11, str. 483]. U toj fazi svijest osjete više ne povezuje samo na temelju relacije prije-poslije, već uvodi stanovitu pravilnost među ono što je doživljeno, javlja se "uzročna pozornost" (*causal attention* [28, str. 45], [26, str. 418], [11, str. 48]; *kausalen Einstellung* [18, str. 417]).

U svojim filozofičnim radovima iz srednjega razdoblja Brouwer uzročnu pozornost i protok vremena ili vremensku pozornost stavlja u posebnu kategoriju, tzv. "matematički pogled" (*mathematische Betrachtung* [18, str. 417]; *mathematical attention* [28, str. 45]; *mathemaical viewing* [26, str. 418]). Tu ideju razvija još na početku karijere; još u disertaciji navodi:

> Čovjeku je svojstvena sposobnost koja prati sve njegove interakcije s prirodom, točnije sposobnost zauzimanja *matematičkoga pogleda* (*mathematical view*) na svoj život, promatranja u svijetu ponavljanja nizova događaja, tj. uzročnih sustava u vremenu. [20, str. 53, kurziv u originalu]

U filozofskim radovima prije [11], Brouwer se terminom "matematika" koristi u širem smislu [1]. To odgovara značenju nizozemskoga termina za matematiku, *wiskunde*, koji može značiti matematiku kao disciplinu, ali i umijeće, proučavanje ili znanje onoga što je sigurno ili egzaktno [1, 35, 37]. Zauzeti matematički pogled znači tražiti sigurnost, egzaktnost, biti, takoreći, proračunat. Ono što svijesti omogućuje da zauzme takav pogled ponajprije je njezina transformacija u *um*, koji osjete slaže prema njihovu vremenskome redoslijedu, a potom pojava slobodne volje, koja ih povezuje u uzročne nizove. Nastavimo s pojmovnom i komparativnom analizom polaznoga teksta.

> U svijetu osjetā koji um doživljava javlja se fenomen slobodne volje, fenomen *uzročne pozornosti*. On izvodi identifikaciju različitih osjeta i različitih složevina osjeta, i na taj način, u osvitu atmosfere predumišljaja, stvara *iterativne složevine osjeta*. Iterativna složevina osjetā, čiji elementi imaju invarijabilan poredak vremenske susljednosti, gdje, ako se pojavi jedan od njezinih elemenata, očekuje se da će se također pojaviti svi sljedeći elementi, u pravilnome redoslijedu, zove se *uzročni niz*. [11, str. 480, kurziv u originalu]

Bez uzročne pozornosti, odnosno samo s vremenskom pozornošću, svijest može jedino nizati osjete u vremenu. Novom vrstom pozornosti svijest iz vremenskih nizova tvori *uzročne nizove*. U [28, str. 45] Brouwer uzročni niz naziva "zajedničkim supstratom identificiranih [vremenskih] nizova". Pogledajmo najprije što Brouwer poima terminom "identifikacija".

Van Dalen u [35, 36, 39] identifikaciju poistovjećuje s *apstrakcijom*. Čini se kako to odgovara definiciji uzročnoga niza kao "zajedničkoga substrata"; da bismo dobili taj supstrat, od ostalih svojstava moramo *apstrahirati*. Sam Brouwer pak govori o procesu apstrakcije, točnije, "matematičke apstrakcije" [28, str. 46], [26, str. 419] samo u kontekstu "čiste matematike" ili matematike u užem smislu. Takvom apstrakcijom dobivamo "zajednički supstrat svih dvojstava" [11, str. 481] na način da dvojstvo lišimo *svih* kvaliteta.

O matematičkoj apstrakciji i njezinu odnosu prema identifikaciji govorit ćemo u sklopu Brouwerova poimanja matematike. Zasad kažimo samo kako i matematička apstrakcija i identifikacija rezultiraju zajedničkim supstratom, no identifikacija ne uključuje *potpunu* apstrakciju.

Prema našem poimanju, identifikaciju subjekt vrši u dvama koracima. Najprije između vremenskih nizova osjetā provodi *djelomičnu* apstrakciju, odnosno apstrahira od onih svojstava koja su različita, a ostavlja ona koja su jednaka ili slična. Tek temeljem preostalih sličnosti subjekt tada djelomično apstrahirane vremenske nizove *poistovjećuje*, odnosno *identificira*. Primjerice, subjekt identificira sve n-torke koje vidi ujutro na specifičnome mjestu kao "svoj aparat za kavu" [39, str. 9]. Možemo kazati kako se identifikacija ili poistovjećivanje u širem smislu sastoji od djelomične apstrakcije i identifikacije ili poistovjećivanja u užem smislu.

Složevine ili kompleksi osjetā nad kojima subjekt vrši identifikaciju elementi su objekta, odnosno podskupovi skupa svih osjeta. Ako osjete shvatimo kao nanizane u vremenu, možemo govoriti i o "podnizovima". Čini se kako Brouwer implicira da nema potpuno jednakih osjeta ili njihovih složevina. Identifikacija se vrši među *različitim* osjetima i složevinama osjeta. Osjeti se razlikuju, ako ne kvalitativno, onda barem po svojem vremenskome poretku. Makar moj aparat za kavu svako jutro "izaziva" jednaku n-torku osjeta, svakim novim danom ta je n-torka dio sve duljega i duljega vremenskoga niza. Stoga možemo kazati da se identificirani osjeti ili njihove složevine razlikuju po svojoj *povijesti*.

Najvažniji moment uzročne pozornosti nije sam proces identifikacije, već ono što ta identifikacija omogućuje, a to je govor o *budućnosti*. Poistovjećivanje dijelova vremenskoga niza osjetā uvodi stanovit red među tim osjetima. Svijest povezuje n-torke osjeta temeljem njihove sličnosti, stvarajući time, osim vremenskih, nove, poistovjećene n-torke. No, time svijest još uvijek kao svoj sadržaj ima samo prošle i sadašnje osjete. Tek "u osvitu atmosfere predumišljaja" subjekt stvara iterativne ili opetovne složevine osjetā, odnosno složevine osjetā koje se mogu ponavljati. Imajući kao sadržaj uma zajednički supstrat identificiranih vremenskih nizova, kada doživi osjete kojima taj supstrat započinje, subjekt *očekuje* da će se pojaviti i ostali osjeti. Klasičan je primjer opetovne složevine osjetā uzročni niz.

Jedna od istaknutih karakteristika Brouwerova poimanja uzročnosti jest drugi ili poseban slučaj uzročne pozornosti. Kako Brouwer navodi, uzročna pozornost stvara iterativne složevine osjetā. Takve složevine mogu se ponavljati i na drugi način, tako da njezini elementi mogu mijenjati svoj redoslijed u vremenu.

> S druge strane postoje iterativne složevine osjetā čiji su elementi permutabilni u točki vremena. Neke od njih potpuno su otuđene od subjekta. One se nazivaju *stvarima*. [11, str. 480, kurziv u originalu]

Sada imamo potpunu definiciju stvarî, one su poseban slučaj permutabilnih iterativnih složevina osjetā, onih koje su nimalo jastvene. Ostaje otvorenim pitanjem što stvari sve uključuju. Naime, kao primjere stvari u [11, str. 480] Brouwer navodi "ljudska tijela, tj. pojedince (*individuals*)" u to uključujući i "tijelo-domaćin (*the home body*) subjekta". Tijela zasigurno nisu prvo što nam pada napamet kao primjer kada govorimo o stvarima. Mi bismo kao svakodnevnije primjere naveli stolove, knjige, atome i slično. Ipak, na pitanje je li naše tijelo stvar, vjerojatno bismo odgovorili potvrdno. Stoga nije toliko neobično o tijelima govoriti kao o stvarima.

Brouwer ne daje poseban naziv za iterativne permutabilne složevine u cjelini. Van Atten predlaže naziv "objektne složevine" (*object complexes*) [1, str. 69]. Prisjetimo se kako smo ranije u kontekstu jastvenosti govorili o "objektima". U [26, str. 418] i Brouwer objekte naziva "posebnim slučajem uzročne pozornosti [...] tj. trajnim (jednostavnim ili složenim) jedinicama svijeta percepcije". Kao primjere Brouwer navodi "vlastitu osobnost i bližnje (*one's own personality and one's fellow man*)", gotovo istovjetno kao za stvari u [11]. Ipak, objekti se razlikuju od stvari jer variraju u stupnju jastvenosti, dok su stvari potpuno otuđene. Stvari su samo poseban slučaj objekata. Zato možemo umjesto "objektne složevine" rabiti Brouwerov termin "objekti".

Začudna je, barem na prvi pogled, Brouwerova tvrdnja da su tijela potpuno otuđena, odnosno nimalo jastvena. Kao primjer nimalo jastvenih predmeta naveli bismo, ponovno, stolove, knjige, atome. Imajući na umu da se jastvenost može mjeriti, bili bismo skloni kazati da je tijelo barem u nekoj mjeri jastveno. Isto tako, primjeri objekata koje Brouwer daje u [26] nisu oni koje bismo očekivali; čini se da iznosi primjere nimalo jastvenih objekata, pa ostaje otvorenim pitanjem koji bi objekti bili dijelom jastveni, a dijelom otuđeni. Nedoumicu možda razrješava Brouwerove definicije *duše*.

> Stvari mogu, ali ne moraju biti nerazdruživo (*indissolubly*) povezane s jastvenim osjetima. Cjelina jastvenih osjeta nerazdruživo povezanih s pojedincem, zove se *duša* odgovarajućega ljudskoga bića. Duša povezana sa subjektom kao pojedincem (*subject-individual*) poprilično je skrivena, ali očituje se u osjetima vokacije i inspiracije. [11, str. 480–481, kurziv u originalu]

Pretpostavit ćemo da Brouwer govori o cjelini *potpuno* jastvenih osjeta. Vidimo najprije kako je duša cjelina, možemo kazati skup jastvenih osjeta. U svjetlu toga tvrdnja da su tijela potpuno otuđena nije toliko neobična. Taj navod nam, tvrdit ćemo, dodatno objašnjava kako Brouwerovo poimanje jastvenosti, tako i "kompoziciju" objekata koji se na "ljestvici jastvenosti" nalaze između dvaju polova. Napomenimo najprije kako su jastveni osjeti jastveni *za subjekt*. Duša odgovorajućega ljudskoga bića cjelina je jastvenih osjeta koje *subjekt* doživljava kao nerazdruživo povezane sa *svojim osjetima* nekoga pojedinca, koji je pak za subjekt poseban slučaj objekta, potpuno otuđena permutabilna složevina osjetā ili – stvar. Brouwer ne tvrdi kako su duše pojedinaca cjeline jastvenih osjeta koje ti pojedinci doživljavaju kao nerazdruživo povezane sa svojim tijelima. Iz toga razloga Brouwer govori o "subjektu kao pojedincu", a kasije o drugim pojedincima govori kao "pojedincima objekta" [11, str. 484].

Iz toga slijedi da subjekt može imati osjete duša drugih ljudskih bića. To će biti od posebne važnosti kasnije, kada ćemo spominjati Brouwerov navodni solipsizam. Osjet duše drugoga svi su jastveni osjeti subjekta koji se javljaju nerazdruživo od osjeta tijela drugoga. Nije potpuno jasno govori li Brouwer o uzročnoj povezanosti, odnosno tvore li za subjekt osjet tijela nekoga pojedinca i osjet duše toga pojedinca uzročni niz. Nadalje, Brouwer navodi kako *stvari općenito*, a ne samo tijela, mogu biti nerazdruživo povezane s jastvenim osjetima. Ni ondje nije potpuno jasno radi li se o uzročnoj svezi, no duše su, izgleda, samo podskup jastvenih osjeta; oni jastveni osjeti vezani uz posebnu vrstu stvarî. Pojedinci ili tijela nisu jedini elementi objekta koji u subjektu izazivaju jastvene osjete. U [11, str. 483] Brouwer govori o "jastvenim elementima objekta koje pronalazimo u oblicima i silama prirode".

Pomoću definicije duše možemo rekonstruirati i dati više smisla Brouwerovim primjerima objekata iz [26]. Smatramo kako vlastita osobnost i bližnji čine primjere objekata koji nisu ni potpuno jastveni ni potpuno otuđeni. Ono što te objekte čini takvima upravo je činjenica da su sastavljeni od potpuno jastvenih i potpuno otuđenih osjeta, od tijela i duše. Stoga se čini da je stupanj jastvenosti ili mjera povratnosti odmaka subjekta od tih objekata funkcija jastvenosti i otuđenosti elementarnih osjeta koji te objekte sačinjavaju. Pritom se jastvenost i otuđenost elementarnih osjeta može mjeriti na bilo koji od triju načina koje smo naveli u prošlome potpoglavlju. Nažalost, Brouwer ne navodi primjere drugih unekoliko jastvenih objekata, onih koji ne bi bili sastavljeni od duše i tijela, a koje možemo pronaći u prirodi.

Nadalje, čini se kako duši subjekta Brouwer daje posebanu težinu. Nju Brouwer ne svodi na osjete, već kazuje kako se ona očituje ili manifestira u osjetima vokacije i inspiracije. Zaključujemo kako su vokacija i inspiracija potpuno jastveni osjeti, ali kako ta vrsta osjetā nije dovoljna kako bismo definirali dušu subjekta. Također izgleda kako vokacija i inspiracija nisu osjeti koje subjekt doživljava u svezi s drugim pojedincima, već su rezervirani isključivo za subjekt. Dapače, svi su osjeti na neki način rezervirani isključivo za subjekt, budući da Brouwer svoju teoriju izlaska svijesti iznosi samo prema obziru na pojedinačnu spoznavajuću svijest, koja izlaskom iz najdubljega doma postaje umom subjekta.

Cjelinu stvarî Brouwer naziva "vanjskim svijetom subjekta" [11, str. 481]. Kako zamjećuje van Stigt, [81, str. 140] "[p]ojam Subjektova vlastita vanjskoga svijeta čini se paradoksalnim, implicirajući s jedne strane odvajanje od Subjekta, Sebstva, a s druge strane pripadnost Subjektu". No, unutar Brouwerove teorije svijesti, taj pojam ima svoje mjesto i značenje. Stvari su, između ostaloga, potpuno otuđeni osjeti ili nimalo jastveni elementi objekta. Kako smo vidjeli, svaki element objekta opisuje se prema obziru na subjekt, pa tako i oni elementi koji su potpuno otuđeni. Stvari su elementi objekta od kojih se subjekt nepovratno odmakao; ne može im se vratiti. One su utoliko subjektu *vanjske*. Stoga ta riječ u Brouwera ima posebno značenje [81]. Budući da potpuno otuđeni osjeti čine vanjski svijet, možda bismo mogli kazati kako potpuno jastveni osjeti čine *unutarnji svijet* subjekta. Tada bi i riječ "unutarnji" imala u Brouwera posebno značenje; ona se ne bi odnosila samo na osjete koji potječu iz subjektove unutarnjosti ili njegove duše.

Nadalje, stvari kao produkt uzročne pozornosti mogu ponovno biti podvrgnute toj pozornosti, one mogu biti dio uzročnoga niza. Uzročni nizovi kojih svaki element sadrži stvari nazivaju se "vanjskim uzročnim nizovima" [11, str. 481]. Govoreći o stvarima kao *elementima* Brouwer sugerira kako se ne radi nužno o potpuno otuđenim uzročnim nizovima, jer stvari koje sastavljaju vanjske uzročne nizove mogu biti uzročno povezane s jastvenim osjetima. Kao i kod objekata, jastvenost uzročnih nizova možemo shvatiti kao funkciju jastvenosti ili otuđenosti elementarnih osjeta koji se pojavljuju u tim nizovima.

Stvari, objekti i uzročni nizovi produkt su uzročne pozornosti, a ona je "fenomen slobodne volje" [11, str. 480]. Stoga se čini da subjekt svojoj vlastitom slobodnom voljom stvara svoj vanjski svijet, među kojima su njegovo vlastito tijelo i tijela drugih pojedinaca. U našoj smo analizi stigli, takoreći, do sredine druge faze izlaska svijesti. Drugi je dio uzročne pozornosti subjektovo *djelovanje*, intervencija u vanjski svijet, koja je isto tako rezultat slobodne volje. Zato sada valja nešto kazati o Brouwerovu poimanju volje.

2.6 Volja u izlasku svijesti

Dosad nismo posvećivali veliku pažnju pojmu slobodne volje. Razlog tomu je, kako ćemo nastojati pokazati, razlika u opisu volje između [11] kao polazišne točke naše analize i Brouwerovih ranijih filozofičnih radova. Karakterizacijom uzročne pozornosti kao "fenomena slobodne volje" Brouwer tek po drugi put u [11] spominje slobodnu volju. Prisjetimo se, za svijest je u najdubljem domu kazao kako oscilira "bez-voljno". Znakovito je da Brouwer pojam slobodne volje u [11] nije spomenuo u opisu prve faze izlaska svijesti, propustivši je staviti u odnos s nastankom uma i razlikom između subjekta i objekta. Ipak, slobodnoj volji Brouwer u svojim drugim filozofičnim radovima pridaje, kako ćemo uskoro vidjeti, mnogo veću pozornost.

Brouwer se ne koristi uvijek terminom "slobodna volja"; ponekad govori samo o "volji". Primjerice u [28, str. 45] Brouwer matematički pogled naziva "činom volje koji služi instinktu za samoodržavanje pojedinca". Isto tako, Brouwer ne govori samo o pojedinačnoj volji, već i o "kolektivnoj volji" [11, str. 483] te o "volji za životom čovjeka i čovječanstva" [26, str. 418]. Stoga bismo mogli zaključiti kako Brouwer razlikuje barem šest vrsta volje: volju čovjeka, volju čovječanstva, slobodnu volju čovjeka, slobodnu volju čovječanstva, volju za životom čovjeka i volju za životom čovječanstva. Mi ćemo ipak odbaciti takvo tumačenje, već ćemo ustvrditi kako Brouwer razlikuje samo dvije vrste volje, slobodnu volju pojedinaca, među koje ubrajamo i subjekta, i kolektivnu volju. Ovdje ćemo govoriti samo o pojedninačnoj volji subjekta; o voljama drugih, kao i o kolektivnoj volji govorit ćemo u okviru treće faze izlaska svijesti, koja nastupa upravo međusobnim odnosom pojedinačnih volja.

Za razliku od [11], u svojim ranijim radovima Brouwer tvrdi kako je matematički pogled, dakle i vremenska i uzročna pozornost, podložna slobodnoj volji. Obraćajući se čitatelju i pozivajući ga da se okrene u sebe (sebstvo), Brouwer u [27, str. 394] navodi:

> Prepoznat ćeš svoju *slobodnu volju*, slobodnu utoliko što se može povući iz svijeta uzročnosti i ostati slobodna [...]. Fenomeni slijede jedan za drugim u vremenu, ograničeni uzročnošću jer tvoj obojan pogled želi (*wills*) tu pravilnost [...]. [27, str. 394]

Slično Brouwer tvrdi i u svojim radovima iz srednje filozofijske faze:

> Matematički pogled nije nužnost, već fenomen života podložan slobodnoj volji.[9] Svatko to može sam ustvrditi unutrašnjim iskustvom: svaki čovjek može po volji ili odsanjati vremensku pozornost i odvojenost između Sebstva i Svijeta percepcije ili svojim vlastitim moćima načiniti to odvajanje i prizvati u svijetu percepcije kondenzaciju različitih stvari. Jednako je proizvoljna i iden-

[9] U [28, str. 45] umjesto te rečenice stoji: "Kao što smo već kazali, obje faze matematičkoga pogleda nisu ni na koji način tek pasivni stavovi (*passive attitudes*); dapače, oni su činovi volje (*acts of the will*)".

tifikacija različitih vremenskih nizova fenomenā koja nam se nikada ne nameće kao neizbježna. [26, str. 418–419]

Ta dva navoda imaju dalekosežne posljedice. Sve što smo dosad opisali – protok vremena, nastanak uma, razlika subjekt-objekt, pojava želje i zazora, identifikacija ili poistovjećivanje raznih složevina osjetā, stvaranje iterativnih složevina osjetā među kojima su i stvari – moglo je i ne biti. Sve navedeno samo je čin volje. Mi ćemo najprije pokušati pronaći mjesto slobodnoj volji unutar prve faze izlaska svijesti, istraživši kakav je njezin odnos prema umu kao temeljnome pojmu prve faze izlaska svijesti. Time ćemo zahvatiti protok vremena, kojim nastaje um, razliku subjekt-objekt, koju um uvodi, kao i pojavu želje i zazora, koje su dipozicija uma.

Kreisel i Newman [65, str. 41] navode primat (*primacy*) slobodne volje nad umom kao bitan aspekt Brouwerove filozofije. Isto naglašavaju i van Atten i Tragesser [7, str. 184]: "Volja je prije Intelekta. Volja svojom slobodom može pogubiti 'moždane potomke' (*brain children*) intelekta, može pogubiti same zakone logike". Primat volje nad umom, njezinu primarnost prema umu možemo protumačiti, čini se, na dva načina. Općenito, u kontekstu izlaska svijesti, "primarnije" može biti ono što se javlja u ranijoj fazi izlaska svijesti. Nazovimo to "genetičkom primarnošću", po uzoru na van Stigta, koji Brouwerovu metodu filozofijskoga istraživanja naziva "genetičkom" [82, str. 382], te navodi kako među sadržajima uma postoji "genetički red" [81, str. 345]. Nastanak stvarî, primjerice, ovisan je o nastanku uma, pa je um *genetički primaran* stvarima. Jednako tako, Brouwerovu tvrdnju o podložnosti slobodnoj volji, kao i van Attenovu, Tragesserovu, Kreiselovi i Newmanovu tezu o primatu ili primarnosti volje nad umom možemo shvatiti kao genetičku primarnost.

Ako uzmemo da volja ima genetički primat nad umom, to znači da slobodna volja nastaje prije prve faze izlaska svijesti, odnosno u najdubljem domu. No, kako smo vidjeli iz opisa najdubljega doma, svijest u njemu oscilira *bez-voljno*. Taj Brouwerov opis, tvrdit ćemo, ipak nije dovoljan da bismo zaključili kako volja ne nastaje prije uma. "Bez-voljnost" možemo shvatiti kao karakteristiku *oscilacije*, a ne kao karakteristiku svijesti. Slobodna volja može postojati, takoreći, kao klica unutar svijesti prisutna još u samome sebstvu, a koja se po prvi puta manifestira kada sebstvo postaje umom. Sličnomu tumačenju bliska je Franchella [46], koja implicitno povlači razliku između slobodne volje uma i slobodne volje Sebstva. Čini se kako slično misle i van Atten i Tragesser, kada kazuju kako su složevine osjetā "prihvaćene na temelju apsolutno slobodne volje koja je intrinzična svijesti" [7, str. 176].

Primat slobodne volje nad umom možemo shvatiti i kao "regulativnu primarnost". Prema ovome tumačenju, um nema primat nad slobodnom voljom jer je njome *reguliran*, što ne mora značiti da slobodna volja nastaje prije uma. Uzmimo kao primjer odnos prometa i prometnih znakova. Sam promet nastao je prije prometnih znakova, koji su nastali upravo zbog prometa. Stoga je promet genetički primarniji prometnim znakovima. S druge strane, prometni znakovi *reguliraju* promet, pa prometni znakovi uživaju regulativni primat nad prometom. Kako tvrde da volja može "pogubiti" tvorevine uma, van Atten i Tragesser također smatraju kako je volja regulativno primarna prema umu. Za razliku od njih, van Stigt ne tvrdi da je volja nastala prije uma, već, naprotiv, govori o "prelasku s Uma na Volju" [81, str. 141], na kojega tada volja utječe. Za njega je um genetički primaran prema volji, a volja regulativno primarna prema umu.[10]

Napomenimo da o regulativnome primatu volje nad umom možemo govoriti i u slučaju u kojem um nastaje *istovremeno* sa slobodnom voljom ili kada je slobobodna volja samo jedna od karakteristika uma. Makar ne navodi u kojoj se fazi izlaska svijesti pojavljuje slobodna volja, Brouwer u [11, str. 484] govori o "umu sa slobodnom voljom". Temeljem toga, ali i iz činjenice da u svojem najzrelijem filozofičnome radu Brouwer slobodnu volju spominje tek u drugoj fazi izlaska svijesti, mi ćemo se odlučiti za tumačenje prema kojem je slobodna volja regulativno primarna prema umu, a um genetički primaran prema slobodnoj volji. Gornji navodi iz [27] i [26], prema našem poimanju, kazuju kako subjekt svoje slobodne volje postaje svjestani tek kada shvati da svijet može "odsanjati" [26, str. 418] ili se povući iz svijeta uzročnosti, a to se događa u drugoj fazi izlaska svijesti.

Osim podložnosti uma slobodnoj volji, možemo razmatrati i primat slobodne volje nad čitavim matematičkim pogledom, odnosno nad vremenskom i uzročnom pozornošću, kako to čini Brouwer u posljednjem izdvojenome navodu. Ovdje ćemo podložnost slobodnoj volji shvatiti kao *kontingentnost*, u skladu s Brouwerovom tvrdnjom kako matematički pogled nije nužnost, te kako je proizvoljan. Također, kontingentnost možemo shvatiti kao *regulativnu sekundarnost slobodnoj volji*. Nadalje u navodu iz [26, str. 418–419] Brouwer tvrdi kako kako su vremenska i uzročna pozornost "jednako proizvoljne". Prisjetimo se, uzročna pozornost započinje identifikacijom osjetā, a: "Jednako je proizvoljna i identifikacija različitih vremenskih nizova fenomena koja nam se nikada ne nameće kao neizbježna".

[10] Van Stigt [81, str. 141–143] u svojoj analizi volju izjednačava s uzročnim djelovanjem, koje je posljedica uzročne pozornosti. Navodi također kako "vanjski svijet subjekta" nastaje prije volje. Mi se nećemo složiti s njegovom interpretacijom. Naime, Brouwer jasno kazuje kako je uzročna pozornost fenomen slobodne volje [11]. Rezultat te pozornosti je i stvaranje vanjskoga svijeta subjekta. Budući da volju shvaća drukčije, ne možemo reći da van Stigt u punome smislu smatra da je volja regulativno primarna prema umu, već da je regulativno primaran prema umu samo dio volje vezan uz djelovanje, koje je tema idućega potpoglavlja.

Mi ćemo ipak tvrditi kako postoji značajna razlika između vremenske i uzročne pozornosti *vis-à-vis* kontingentnosti, razlika koja se ne može iščitati iz gornjih navoda o slobodnoj volji, u kojima je riječ o kontingentnosti čitavoga matematičkoga pogleda. U nastavku ćemo istražiti kakav je odnos vremenske i uzročne pozornosti, kako bismo pokazali kako je, makar su i vremenska i uzročna pozornost kontingentne, potonja pozornost, takoreći, kontingentnija.

Kao prvo, treba uzeti u obzir redoslijed faza pri izlasku svijesti iz najdubljega doma. Subjekt može, kao što smo vidjeli, zamenariti svoje odvajanje od svijeta osjetā i time dokinuti kako vremenske, tako i uzročne nizove osjetā. No, valja primijetiti kako ukidanje vremenskih nizova *povlači* ukidanje uzročnih nizova, jer svaka faza izlaska svijesti pretpostavlja prethodnu [1]. Ukidanjem dvojstva ukida se i mogućnost opetovanja dvojstva, a time i stvaranje bilo kakvih nizova. S druge strane, ukidanje uzročne pozornosti ne mora značiti ukidanje vremenske pozornosti. To nas dovodi do druge bitne razlike među tim pozornostima, vezane uz poimanje vanjskoga svijeta.

Jednom kada se subjekt odvojio od objekta, on osjete ne može doživljavati drukčije nego u vremenu. Razlika među osjetima, njihova mnoštvenost, moguća je samo u vremenu; za Brouwera je, kao i za Kanta, vrijeme apriorna forma iskustva. Potvrdu tomu nalazimo, primjerice, u sljedećem navodu:

> Moramo li zaključiti kako uopće ne postoji apriorna forma percepcije za svijet iskustva? Ona postoji, ali samo ako svako iskustvo gledamo kao prostornu ili ne-prostornu promjenu, čija je intelektualna apstrakcija *intuicija vremena* ili *intuicija dvoga u jednome*. [19, str. 116, kurziv u originalu]

Brouwer govori o "intelektualnoj apstrakciji" o okviru svoje definicije matematike. Kako smo naveli u Uvodu, osnovnu intuiciju matematike dobivamo kada dvojstvo lišimo svih kvaliteta. Time dobivamo intuiciju vremena ili osnovnu intuiciju matematike. No, ovdje nas zanima vrijeme, takoreći, prije matematike, kao apriorna forma svakoga mogućega iskustva svijeta. Tako Brouwera tumače i van Atten i Tragesser [7, str. 176] kazujući kako je "vremenska svijest (*consciousness*) [...] preduvjet za svjesnost (*awareness*) objekata i ljudi (uključujući sebe sama kao utjelovljene osobe) i svega ostaloga u vanjskome svijetu". Ovome ćemo dodati da je vremenska pozornost preduvjet ne samo za svjesnost *vanjskoga* svijeta, već i za svjesnost svijeta osjetā. "Osjeti su individuirani u vremenu" [1, str. 71]. Naposljetku, svijet osjetā i nastaje *vremenskom* pozornošću.

Ipak, izgleda kako vrijeme nije apriorna forma *svakoga* mogućega iskustva, već samo iskustva objekta. "Odsanjivanje" [26, str. 419] vremenske pozornosti također je iskustvo, ali ono ne podliježe vremenitosti. U [27, str. 393] takvo iskustvo Brouwer naziva "religioznim osjetom" (*religious sensation*). Povratkom u objekt, boljereći, nasuprot njemu, subjekt završava svoje "privremeno povlačenje (*refluence*) u najdublji dom" [11, str. 483], vraćajući se mnogostrukosti osjetā koji slijede jedan za drugim u vremenu. Možemo kazati kako je vrijeme apriorna forma svakoga iskustva *uma*, kao svijesti koja je napustila najdublji dom.

Postoje, međutim, mjesta koja navode na drukčije tumačenje. Jedno takvo nalazimo u [20, str. 71], gdje Brouwer tvrdi kako ne postoji ništa što je "neodvojivo povezano s vanjskim iskustvom", već dodaje kako se intuicija vremena "nužno pojavljuje u matematičkome spremniku (*mathematical receptacle*) iskustva", i to "na temelju organizacije ljudskoga intelekta". Slično tvrdi i Franchella, [46, str. 375]: "intuicija vremena ne zahtijeva vanjsko iskustvo, baš kao što vanjsko iskustvo ne zahtjeva vrijeme". Prema ovoj interpretaciji, moguće je i "nevremensko" iskustvo vanjskoga svijeta. Jedan od načina da te navode dovedemo u sklad s našim tumačenjem jest da ih razumijemo kao da govore o *ljudskome* umu ili umu kao karakteristici čovjeka. Tomu u prilog možda govori ovaj dio iz odbijenih dijelova Brouwerove disertacije:

> Linearnost i pravilnost nalazimo, primjerice, i u pčela; ondje one ne rezultiraju nikakvom vrstom posebne moći. Ali čovjek ima sposobnost koja prati sve njegove interakcije s prirodom, sposobnost objektificiranja svijeta, kojom u svijetu vidi uzročne sustave u vremenu. [80, str. 394]

Postoje, izgleda, stvorenja koja ne "objektificiraju", koja ne postaju subjektom, odvajajući se time od svijeta percepcije. Sukladno tomu mogli bismo dodati kako mogu postojati i stvorenja koja objektificiraju na različit načim, koja u svijetu ne vide uzročne sustave u vremenu. Mi ćemo takav načim usklađivanja [20, str. 71] i [46, str. 375] s tezom da je za Brouwera vrijeme apriorna forma iskustva svijeta ostaviti samo kao mogućnost.

Uzročnost, s druge strane, nije apriorna forma iskustva svijeta percepcije. Potvrdu tomu nalazimo već u činjenici da se ona pojavljuje tek u drugoj fazi izlaska svijesti. Subjekt može doživljavati "svijet osjeta raznovrsne mnoštvenosti" [11, str. 480] i bez da te osjete povezuje u složevine osjetā koje se mogu ponavljati, tj. bez stvaranja iterativnih složevina osjetā. Identifikacija vremenskih nizova nije nužnost. Ipak, uzročna je pozornost, možemo kazati, apriorna forma iskustva *vanjskoga* svijeta, koji sada treba jasno razlikovati od svijeta percepcije; vanjski svijet, kao cjelina stvarî, produkt je uzročne pozornosti, dok je svijet osjetā rezultat vremenske pozornosti. Također ćemo kazati kako treba razlikovati "vanjski svijet subjekta" iz [11] i "vanjsko iskustvo" iz [20]. Naime, Brouwer pojam vanjskoga svijeta kao različitoga od svijeta percepcije uvodi tek u [11]. Stoga ćemo “vanjsko iskustvo” pojmiti kao “iskustvo onoga vanjskoga”, odnosno iskustvo onoga što je odvojeno od subjekta. Iz toga razloga, tvrdimo, Brouwer u svojoj disertaciji ne navodi uzročnost kao apriornu formu.

Isto tako, svijet osjetā i vanjski svijet subjekta nemaju isti epistemički status. Brouwer kazuje kako se “uzročna pozornost susreće s određenim otporom od strane objekta, tako da je pouzdanje u uzročne nizove uvijek iznova suočeno s neočekivanim i neobjašnjivim obmanama” [11, str. 481]. Slično Brouwer navodi i u [80, str. 395]:

> [P]ouzdanost ljudskoga uvjerenja da dijelovi [uzročnoga] niza pripadaju zajedno u stvarnosti je daleka od apsolutne i uvijek se može opovrgnuti, to intelekt doživljava kao otkriće da “pravilo više ne vrijedi”.

Brouwer dodano naglašava nepouzdanost uzročne pozornosti, što ne čini i s vremenskom pozornosti. Protok vremena donosi odvajanje subjekta od objekta, koje Brouwer naziva “nereligioznim odvajanjem” [23, str. 107]. Iz etičke perspektive, prema obziru na najdublji dom svijesti, vremenska je pozornost pogrešna. No, ona nije nepouzdana, u smislu da subjekt može poimati vremenske nizove u pogrešnome redoslijedu. Brouwer nigdje ne navodi da možemo pogriješiti u primjeni relacije “prije-poslije”, dok smo u identifikaciji vremenskih nizova i očekivanju da će se oni ponoviti često u krivu. Dodatnu potvrdu takvomu Brouwerovu stavu nalazimo u [11, str. 487] gdje govori o “zabludi (*delusion*) uzročnosti”, u [26, str. 418] uzročni niz naziva “fantazijom”, dok u [26, str. 419] kazuje kako je tobožnja uzročna koherentnost svijeta “tamna sila ljudske misli”.

Čovjek ipak ustraje u uzročnome poimanju svijeta, on nastavlja svijetu percepcije “nametati” [67, str. 180] uzročnost, odnosno “otkrivati” uzročne nizove. Zato ćemo reći da je uzročna pozornost pod većim utjecajem volje, i to “volje za životom čovjeka” [26, str. 418]. Unatoč opetovanim razočaranjima u uzročne nizove, “ um, prihvativši jednom uzročnu pozornost, ostaje u trajnoj *uzročnoj napetosti*“ [11, str. 481, kurziv u originalu]. Subjekt voljno traži pravilnost u vanjskome svijetu, kako bi u njemu opstao:

> Kako bi što je dulje moguće održao sigurnost opažene pravilnosti, čovjek pokušava *izolirati* sustave, tj. isključiti ona promatranja koja narušavaju pravilnost; na taj način čovjek *stvara* u prirodi mnogo više pravilnosti no što se javlja izvorno; on *želi* tu pravilnost, jer ona ga čini snažnijim u borbi za život, čineći ga sposobnim za predviđanje i poduzimanje akcije. [20, str. 53, kurziv u originalu]

Na kraju ovoga navoda vidimo razlog subjektova inzistiranja na uzročnosti: djelovanje na temelju predviđanjā.

Ipak, “borba za život” o kojoj Brouwer govori nije dio izvornoga ljudskoga stanja. U okviru neutemeljenosti uzročne pozornosti treba još spomenuti i “mitološko vrijeme“ [76, str. 178] koje Brouwer opisuje u [27, str. 391]:

> Čovjek je izvorno živio u izolaciji. Uz podršku prirode svaki je pojedinac nastojao održati ravnotežu između grešnih napasti. To je ispunjavalo njegov život, nije bilo odnosa s drugima, ni brige za budućnost. [...] Ali čovjek nije bio zadovoljan; počeo je vršiti kontrolu nad svojim bližnjima i tražiti sigurnost o budućnosti. I tako je ravnoteža izgubljena [...].

Taj citat dolazi iz razdoblja kada Brouwer još nije eksplicitno razlikovao faze svijesti. Temeljem njihova detaljna opisa u [11] u gornjem navodu možemo iščitati da Brouwer govori o drugoj i trećoj fazi izlaska svijesti. Drugu fazu karakterizira “briga za budućnost”, dok je “odnos s drugima” rezultat treće faze izlaska svijesti. O trećoj fazi izlaska svijesti bit će govora nešto kasnije. Uzročnom pozornošću čovjek, kako vidimo, narušava svoju ravnotežu s prirodom podilazeći “grešnim napastima”. Izvorno stanje ravnoteže s prirodom, čini se, nije najdublji dom svijesti, budući da u najdubljem domu svijesti još ne može biti govora ni o kakvome razlikovanju subjekta od objekta, pa ni o prirodi koja bi taj subjekt podržavala. Stoga ćemo zaključiti kako ondje Brouwer govori o pojedincu koji živi samo u vlastitu svijetu percepcije, odnosno samo s vremenskom pozornosti prirode.

Zaključujemo nakraju kako, premda u [26, str. 419] Brouwer obje pozornosti naziva “jednako proizvoljnima”, jasno je kako prema uzročnoj pozornosti zauzima nešto negativniji stav. Takav stav još je izraženiji prema drugome dijelu uzročne pozornosti, uzročnome djelovanju.

2.7 Uzročno djelovanje

U ovome ćemo potpoglavlju tematizirati drugi dio druge faze izlaska svijesti, koji uključuje subjektovo *djelovanje* na temelju uzročne pozornosti. Za početak ćemo se nadovezati na dva navoda iznesena na kraju prošloga potpoglavlja. Naime, citati iz [20] i [27], osim što govore u prilog kontingentnosti uzročne pozornosti, govore i o subjektovu djelovanju, njegovoj intervenciji u vanjski svijet. To djelovanje u Brouwera ima izražen moralni prizvuk; subjekt intervenira u prirodu, a upravo je odnos čovjeka i prirode jedan od stupova Brouwerove moralne filozofije. Vidjeli smo kako Brouwer u [27] govori o “ravnoteži s prirodom” i narušavanju toga poželjnoga stanja. Stoga ćemo prije opisa djelovanja iznijeti kratak opis Brouwerova poimanja moralnosti.

Kao primjer narušenoga odnosa čovjeka i prirode Brouwer navodi svoju rodnu Nizozemsku.

> Nizozemska je nastala i održala svoje postojanje sedimentacijom velikih rijeka. Postojala je prirodna ravnoteža dina i delti, plima i odvodnje. [...] Ali ljudi nisu bili zadovoljni; kako bi regulirali ili spriječili poplave na rijekama su sagradili brane; promijenili su tok rijeka kako bi poboljšali odvodnju ili omogućili riječni promet te su posjekli šume. Nije ni čudo što se suptilna ravnoteža Nizozemske poremetila [...]. [27, str. 391]

Brouwer nastavlja opisujući odnos ljudi i životinja. Izvorno ljudi nisu mnogo utjecali na životinjski svijet.

> To je sretno stanje okončano kada su nezadovoljni ljudi počeli živjeti na račun životinja koje su smatrali korisnima, a ostale pokušali istrijebiti. Prirodni je red narušen i pretvoren u bijedu [...]. [27, str. 391]

Slične tvrdnje nalazimo i u izvornome rukopisu Brouwerove disertacije. U necenzuriranoj verziji drugoga poglavlja doktorskoga rada, naslovljenome "Matematika i iskustvo", Brouwer govori "eksternalizaciji [ljudskoga] života", kojom čovjek "svoju okolinu (*environment*) čini podložnom (*subservient*) potpunome razvoju svoje ljudskosti (*humanity*)". Samu "eksternalizaciju" Brouwer pak naziva "voljom za uništenjem i vladavinom" te dodaje: "Oni koji vladaju već su prokleti (*damned*) i proklete su one kvalitete koje promiču ljudsku vladavinu" [80, str. 394]. Subjekt svojim djelovanjem ne može poboljšati prirodni red. "Svaka borba za bolji poredak samo je još jedna kap više u oceanu ludosti" [27, str. 400], dočim nas "Providnost [...] nije postavila u ovaj svijet kako bismo poboljšali njezin posao". [11, str. 486]

Djelovanje utemeljeno na uzročnoj pozornosti Brouwer u [28, str. 46] i [26, str. 419] Brouwer naziva "matematičkim činom". Ovdje riječ "matematika" Brouwer ponovno poima u širem značenju, jednako kao i pri sintagmi "matematički pogled". Kasnije, u [11] to djelovanje naziva "umješnim" (*cunning*). Koliku važnost u izlasku svijesti zauzima subjektovo djelovanje govori ovo mjesto:

> Jedino opravdanje matematičkoga pogleda leži u oportunosti "matematičkoga čina", koji je na njemu [matematičkome pogledu] utemeljen i koji je u dosegu čovjeka zbog njegove [čovjekove] uzročne pozornosti. [26, str. 419]

Time Brouwer, čini se, iznosi veoma snažnu tezu; ni vremenska ni uzročna pozornost nemaju smisla osim ako nisu usmjerene prema djelovanju ili činjenju. Mi ćemo ipak tvrditi da Brouwer ne daje objema pozornostima isti opravdajni status *vis-à-vis* djelovanja, jednako kao što im ne daje isti modalitet. Prisjetimo se, u istome je radu naveo kako matematički pogled nije nužnost, kako bi se pokazalo da je jedan dio matematičkoga pogleda, vremenska pozornost, ipak nešto "nužniji". Slično ćemo kazati i ovdje. Vjerujemo kako je vremenska pozornost više opravdana nego uzročna, odnosno da je jedini smisao uzročne pozornosti subjektovo djelovanje, dok vremenska pozornost može imati neki smisao i bez obzira na djelovanje; konkretno, unutar područja matematike, o kojoj ćemo govoriti kasnije.

Matematički, tj. umješan čin Brouwer opisuje rabeći pojmove *cilja* i *sredstva*. Ti pojmovi zauzimaju značajno mjesto već u [27], u razdoblju kada Brouwer još nije eksplicirao pojmove vremenske i uzročne pozornosti. Već sama kategorizacija ili poimanje složevina osjetā kao "cilja" i "sredstva" u Brouwera ima snažnu negativnu konotaciju:

> U ovome životu požude i želje intelekt čovjeku čini dijaboličnu uslugu povezivanjem dviju slika imaginacije kao sredstva i cilja. Pritisnut željom za jednom stvarju, intelekt ga navodi na težnju za drugom kao sredstvom prethodnu. [27, str. 395]

Mehanizam subjektova djelovanja Brouwer detaljnije opisuje u [28, 26, 11]. Mi prenosimo podulji ali jezgrovit opis iz [11], koristeći se i dalje tim posljednjim Brouwerovim filozofičnim radom kao polazišnom točkom naše analize.

> Uzročna pozornost dopušta razvoj konativne aktivnosti subjekta iz spontanoga truda prema predumišljajnome poduzimanju (*forethinking enterprise*) pomoću fenomena slobodne volje, *umješnoga čina*. Umješan čin se sastoji u tome, da je u uzročnome nizu mogućnostî (*eventualities*) kasniji element koji nije konativno dostupan na spontan način, ali *željen* je (*cilj*), ostvaren *neizravno* izazivanjem po sebi možda nepoželjnoga ali konativno dostupnoga ranijega elementa niza (*sredstva*) te dobivanja u njegovu [ranijega elementa] svjetlu željenoga elementa kao njegove *posljedice*. [11, str. 481, kurziv u originalu]

Prije svega, izneseni opis djelovanja govori nam nešto više o, takoreći, preddjelatnoj uzročnoj pozornosti. Naime, ondje Brouwer po drugi put u [11] spominje "konativnu aktivnost". Pozitivnu i negativnu konativnu aktivnost ranije navodi kao posljedicu pojave želje i zazora, koji se pak javljaju prema obziru na otuđenost elemena objekta. I ondje se o konativnoj aktvnosti govori u kontekstu želje, želje za ciljem. Stoga ćemo pozitivnu konativnu aktivnost razumjeti kao subjektov *stav* o poželjnosti elementa objekta, a negativnu konativnu aktivnost kao njegov stav o nepoželjnosti, ili zaziranje od elementa objekta. "Spontani trud" konativne aktvnosti prije umješnoga čina shvaćamo kao doživljavanje poželjnih i nepoželjnih osjeta unutar vremenskih i uzročnih nizova, gdje potonji nizovi nastaju, možemo kazati, nešto manje spontano ili uz ponešto veći trud, zahtijevajući predumišljaj i identifikaciju. Prije i bez uzročnoga djelovanja subjekt je "osuđen" na spontanu pojavu poželjnih i nepoželjnih elemenata objekta.

"Razvoj konativne aktivnosti" razumijemo kao pojavu novih želja; subjekt pod utjecajem uzročne pozornosti i pod pretpostavkom mogućnosti uplitanja u uzročni niz *želi* element toga niza koji po sebi možda i nije poželjan. Time činimo otklon od Brouwerova opisa; on ni u gornjem navodu, ali ni u karakterizaciji "matematičkoga čina u [28] i [26] ne navodi kako sredstvo za poželjan cilj zaista želimo. Kako bismo otklon ublažili, razlikovat ćemo dvije vrste poželjnosti: poželjnost po sebi i poželjnost prema obziru na posljedicu ili poželjnost prema elementu uzročnoga niza kao prema sredstvu. U skladu s time, dopustit ćemo da neki element uzročnoga niza može biti po sebi nepoželjan, subjekt od njega može zazirati, ali može ga željeti relativno ili prema obziru na njegovu poželjnu posljedicu.

Analogno, možemo razlikovati i dvije vrste zazornosti. Od nečega možemo zazirati po sebi, ali i zato što ima nepoželjnu posljedicu. Potvrdu tomu nalazimo nešto nakon gornjega izdvojenoga mjesta, gdje Brouwer kazuje kako cilj i sredstvo mogu biti i negativnoga karaktera, odnosno usmjereni na sprječavanje. Ipak, o zazoru ne možemo govoriti u terminima cilja i sredstva, budući da je cilj definiran kao nešto poželjno. U tome slučaju zazor možemo shvatiti kao "negativnu želju", termin koji Brouwer također upotrebljava u [11, str. 481]. Zazor prema kasnijem elementu uzročnoga niza (ljudskoga)subjekta navodi da djeluje na raniji element toga niza, u nastojanju da spriječi nepoželjnu posljedicu i postigne *neki drugi* cilj. Nadalje, mogli bismo dodati kako cilj koji subjekt u tome slučaju postiže možda nije poželjan sam po sebi, već samo *više poželjan* od nepoželjnoga elementa koji bi se dogodio da ga subjekt svojim djelovanjem nije onemogućio. U svakome slučaju, pojmovi želje i zazora, odnosno njihova prisutnost u umu subjekta, nužna je za matematičko ili umješno djelovanje; možemo kazati da želja ili zazor uživaju genetički primat nad uzročnim djelovanjem.

Dosad nismo kazali što točno Brouwer smatra obmanjujućim u uzročnim nizovima. Konkretan problem možemo iščitati iz sljedećega ranoga mjesta:

> Čin usmjeren sredstvu, međutim, uvijek u nekoj mjeri premašuje (*overshoots*) metu; sredstvo ima svoj vlastiti smjer, koji je makar pod malenim kutem okrenut od smjera cilja. On [čin usmjeren k sredstvu] stoga djeluje ne samo

> u smjeru cilja, već također i u drugim dimenzijama. [...] Ako se taj obmanjujuć skok s cilja prema sredstvu ponovi nekoliko puta, može se dogoditi da slijedimo smjer koji ne samo da odstupa prema drugim dimenzijama, već je suprotstavljen smjeru izvornoga cilja i time ga suzbija. [27, str. 395]

Ovdje, smatramo, Brouwer ne govori samo o pogrešivosti uzročnoga djelovanja, već o nesavršenosti inherentnoj svakomu uzročnomu nizu. Djelovanjem subjekt pokreće uzročni niz, a njegovi dijelovi tada djeluju "pod kutem". U svjetlu ovoga navoda čitamo sljedeće, preko četiri desetljeća kasnije napisano, mjesto:

> [S]vi su uzročni nizovi pod utjecajem netočnostî, pa ulančavanjem uzročnih nizova ne moramo nužno dobiti drugi uzročni niz. [11, str. 481]

Ulančavanje shvaćamo kao Placek u [71, str. 21]: spajanje dvaju nizova od kojih prvi završava istim elementom kojim drugi niz započinje. Ovo je bitna značajka Brouwerova poimanja uzročnosti: za razliku od "klasičnoga" shvaćanja, prema Brouwerovu uzročnost *nije prijelazna*. Razlog iz kojega niz koji dobivamo na takav način ne mora biti uzročan, upravo je "vlastiti smjer" svakoga od dijelova uzročnoga niza.

Uzmimo neka dva uzročna niza. Neka se oba sastoje od triju elemenata, prvi od A, B i C, a drugi od C, D i E. Uzročnu svezu među elementima niza možemo prikazati strelicama; tada imamo:

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \text{ i } C \longrightarrow D \longrightarrow E.$$

Ipak, smatramo kako takav prikaz ne oslikava vjerno Brouwerovu tvrdnju kako elementi niza mogu djelovati "pod kutem". Stoga, kako bismo prikazali izostanak tranzitivnosti uzročnih nizova, dodajmo svakome elementu uzročnoga niza njegov vlastiti smjer, usmjerivši neke od strelica "makar pod malenim kutem". Imamo tada, primjerice:

$$A \longrightarrow B \nearrow C \text{ i } C \searrow D \uparrow E.$$

Iz prvoga prikaza, slijedivši strelice, bilo bi opravdano izvesti zaključak $A \longrightarrow E$, no uzmemo li u obzir smjerove strelica iz drugoga prikaza, takav je zaključak neopravdan, jer se može dogoditi da se, primjerice, smjer u kojem djeluje element B suprotstavlja smjeru elementa E.

Spomenimo ovdje kako prijelaznost uzročnosti nije bez kritike ni u modernijoj literaturi. Iz filozofijske perspektive, među poznatijima su Hallova [49] i Hitchcockova [54]. No, te su kritike više usmjerene prema rafiniranju samoga pojma uzročnosti pomoću protuprimjera prijelaznosti, dok Brouwer neprijelaznost uzročnosti izvodi iz "nepopravljivosti" toga pojma. Iz logičke pak perspektive, a nadahnuto filozofijom znanosti, spomenimo Weingartnerov [92] opis , gdje se razlikuje čak pet vrsta uzočnih relacija, dvije od kojih nisu prijelazne. Nadalje, autor uzročnosti karakterizira semantički, razlikujući šest istinitosnih vrijednosti. U Brouwera pronalazimo samo jednu uzročnost, koje formalan opis donosimo u potpoglavlju 3.3, služeći se dvovrijednosnom logikom.

Uzročno je djelovanje pod utjecajem slobodne volje. Za razliku od gore istraženoga utjecaja volje na matematički pogled, u sferi matematičkoga ili umješnoga djelovanja, slobodnu volju možemo shvatiti u uobičajenijem filozofijskome smislu. Subjekt može djelovati ili ne djelovati. Može djelovati na ovaj ili onaj način, odnosno može *učiniti drukčije*. Treba ipak imati na umu da je voljno djelovanje pod utjecajem uzročnih nizova, koji su također produkt slobodne volje; subjekt je slobodan učiniti ovako ili onako na temelju uzročnoga niza koji sâm svojom voljom proizvodi. Slobodna volja subjekta, ali i volja drugih činitelja, igra značajnu ulogu u trećoj i posljednjoj fazi izlaska svijesti, koja je tema sljedećega potpoglavlja.

Ujecanjem na svoju okolinu subjekt se već dobrano "nastanio" u svoj vanjski svijet i udaljio od najdubljega doma. Nije samo pasivan primatelj osjeta, već svojom voljom utječe na svijet. Ipak, prisjetimo se kako još uvijek govorimo o "izoliranoj uzročnoj fazi", fokus je isključivo na pojedinačnome subjektu, njegovim uzročnim nizovima, njegovim željama, bojaznima, sredstvima i ciljevima.

U drugoj fazi izlaska svijesti o drugim subjektima možemo govoriti tek kao o stvarima, posebnome slučaju opetovnih složevina osjetā u svijetu pojedinačna subjekta, čiji razvoj svijesti promatramo. Unekoliko čak i ne govorimo o *subjektima* u pravome, brouwerovskome smislu, gdje "biti subjektom" znači imati um, već tek o *pojedincima (individuals)*, koji se svode samo na tijela podložna uzročnim zakonitostima. Terminom "subjekt" Brouwer se u [11] koristi gotovo isključivo u jednini, govoreći, takoreći, u prvome licu, opisujući razvoj svijesti i konstituciju svijeta iz perspektive pojedinačnoga spoznavajućega činitelja.

Makar su pojedinci stvari, a ne subjekti, barem za neke od njih možemo reći da imaju *duše*, odnosno da u subjektu pobuđuju jastvene osjete. No, u sferi djelovanja subjekta Brouwer duše ne spominje. U skladu s našom interpretacijom želje i zazora kao svojstva otuđenih osjeta pretpostavit ćemo da za osjete duša kao potpuno jastvenih osjeta pri djelovanju nema mjesta upravo zato što se djelovanje definira pomoću želje i zazora.

"Subjektivna" je perspektiva i dalje je prisutna u Brouwerovome opisu treće faze izlaska svijesti; i dalje govorimo o razvoju svijesti i svijeta pojedinačnoga subjekta, no sada taj subjekt drugim pojedincima daje veći stupanj autonomije [35]. Time on širi svoj spoznajni horizont, a sve pod utjecajem i u svrhu što učinkovitijega djelovanja.

2.8 Treća faza izlaska svijesti

Dosad je svaka faza izlaska svijesti bila određena pojavom posebne vrste pozornosti. Svijest se u prvoj fazi izlaska od svijesti u najdubljem domu razlikovala dodatnim obilježjem vremenske pozornosti, dok je u novost druge faze dodatak uzročne pozornosti. U trećoj fazi izlaska svijesti Brouwer ne govori o nekoj (posve) novoj pozornosti unutar svijesti. Uzročna pozornost bit će glavno obilježje i posljednje, treće, *društvene ili socijalne* faze izlaska svijesti. Ono što socijalnu fazu čini posebnom, ili ono što ju čini zasebnom *fazom*, jest svojevrsno poopćenje druge faze izlaska svijesti; više nije riječ samo o izoliranome uzročnom mišljenju i djelovanju, već i o udruženome, društvenome ili socijalnome uzročnome mišljenju i djelovanju.

Činjenica da Brouwer, kako ćemo uskoro pokazati, treću fazu izlaska svijesti ne karakterizira nekom novom pozornošću mogla bi nas navesti da se upitamo slijedi li ona prirodno *nakon* druge faze, odnosno je li subjekt već u drugoj fazi izlaska svijesti opremljen svim potrebnim "spoznajnim kapacitetima". Ono što društvenu fazu izlaska svijesti prirodno postavlja nakon druge faze jest, takoreći, njezina ovisnost o dovršetku druge faze; u umu se javlja uzročna pozornost, um ili subjekt djeluje pod utjecajem i pretpostavkom uzročne pozornosti, a potom:

> Uzročna pozornost opetovano dovodi do identifikacije složevina osjetā koje potječu od uzročnih činova subjekta, sa složevinama osjetā doživljenih u uzročnoj svezi s drugim pojedincima. Na račun te identifikacije potonje složevine osjetā nazivaju se *činovi tih drugih pojedinaca.* [11, str. 482, kurziv u originalu]

Primijetimo kako Brouwer u gornjem navodu govori samo o jednome aspektu uzročne pozornosti, o identifikaciji ili poistovjećivanju, ne spominjući njezinu dodatnu karakteristiku, stvaranje iterativnih složevina osjeta. Subjekt dakle primjećuje stanovitu sličnost između uzročnih nizova koje pokreće vlastitim djelovanjem ili vlastitom voljom i uzročnih nizova u kojima sudjeluju pojedinci kao neke od stvari u vanjskome svijetu subjekta. Drugim riječima, neke se stvari u vanjskome svijetu ponašaju na poseban način, one nisu tek pasivni dijelovi uzročnoga niza, već svojom pojavom u uzročnome nizu subjekt "podsjećaju" na njegovo vlastito voljno djelovanje. Umu neke složevine osjeta djeluju kao da – djeluju, ili kao da posjeduju "aktivan faktor" [71, str. 23].

Ovom se spoznajom svijet osjetā subjekta dodatno širi i obogaćuje, njegovo djelovanje više nije izolirano i samostalno, već na njega *utječe* djelovanje drugih:

> Nadalje, uzročni činovi subjekta i oni brojnih drugih pojedinaca utječu jedni na druge u velikome stupnju; za mnoge se uzročne činove mnogih pojedinaca čak čini da imaju mogućnost i smisao isključivo kao jedinice organizirane suradnje manjih ili većih grupa pojedinaca; čini se kako udio subjekta u toj suradnji po svojoj prirodi nije različit od udjela pojedinaca objekta. [11, str. 482]

Ostali pojedinci, vidimo, nisu samo pojedinci koji djeluju, već u značajnoj mjeri djeluju na sam subjekt. Njihovi činovi vrlo često daju smisao ili bivaju nužnima za svrhovito djelovanje subjekta. Stoga subjekt s takvim pojedincima stupa u suradnju. Isto tako, premda su uzročni činovi subjekta njemu "razložni", odnosno pod utjecajem njegove slobodne volje, oni se bitno ne razlikuju od uzročnih činova ostalih pojedinaca. Ipak, ti su pojedinci i dalje za subjekt tek složevine osjetā, dio njegova svijeta percepcije ili *objekta*, pa ih ondje Brouwer naziva "pojedincima objekta".

Suradnja i udruživanje s drugima uključuje mnogo više varijabli nego samostalna uzročna djelatnost: "[s]ustavi uzročnoga mišljenja u podlozi [...] kooperativnih uzročnih činova mnogo su kompliciraniji nego oni koji pokreću individualne uzročne činove" [11, str. 482]. Brouwer je u svojim filozofičnim radovima iz srednje faze [26, 28] nešto manje sklon pozitivnomu opisu međuodnosa subjekta i drugih činitelja; ne govori o "suradnji", već o "služenju", "sili" i "radu":

> [M]atematički pogled i djelovanje može se preusmjeriti od služenja vlastitoj osobnosti k onoj drugoga objekta, bilo izravno, svojom vlastitom slobodnom voljom, [...] bilo uz pomoć sile, tj. pod utjecajem volje ne-jastvenih objekata, koja se također može pojaviti kao kolektivna volja grupe ljudi ili cijeloga čovječanstva. Ta podložnost matematičkoga pogleda i djelovanja ne-jastvenim objektima naziva se radom. [26, str. 420–421]

Makar u gornjem navodu govori o radu, kasniji termin "suradnja" istoga je korijena; su-radnja je zajednički rad. Sličan opis Brouwer iznosi i u [28]. U gornjem navodu vidimo važan "ustupak" subjekta na račun drugih činitelja, on im pripisuje (slobodnu) volju; oni više nisu samo, terminologijom srednjega Brouwera, objekti koji djeluju i objekti koji djeluju na subjekt, već i objekti koji djeluju vlastitom slobodnom voljom. U radovima iz svojega srednjega filozofijskoga razdoblja Brouwer posvećuje nešto veću pozornost utjecaju drugih činitelja na subjekt i načinu na koji mu oni svoju volju nameću. Volju drugih

Brouwer pretpostavlja i u [11]. Pritom ne navodi na koji točno način subjekt "otkriva" volju drugih, ne spominje nikakvu novu spoznajnu moć ili "pozornost" koja bi subjektu omogućila da pripiše volju drugima. Stoga zaključujemo kako to subjekt čini na temelju "voljnolikoga" ponašanja pojedinaca objekta, svojevrsnim zaključkom na najbolje objašnjenje.

Ono što je vrlo značajno u Brouwerovu poimanju suradnje jest da ona nije samo podložnost djelovanja, već podložnost čitavoga matematičkoga pogleda. Pojedinci objekta time dobivaju još veću važnost u svijetu subjekta, oni subjekt dovode do matematičkoga pogleda koji čini rad prihvatljivim sredstvom za ostvarenje njegovih ciljeva. Prisjetimo se, čitav je matematički pogled pod utjecajem slobodne volje. Ranije smo posebno istražili odnos slobodne volje subjekta prema svakome dijelu matematičkoga pogleda, kako prema vremenskoj, tako i prema uzročnoj pozornosti. Subjekt svojom voljom djeluje, ali njome i stvara svoj vanjski svijet; vanjski je svijet, možemo kazati, čin volje. Kada u obzir uzmemo druge činitelje, možemo istražiti u kojoj se mjeri njihove volje preklapaju; činovi volje subjekta mogu biti slični ili jednaki činovima volje drugih. U [27, str. 401] Brouwer govori o voljama koje su "na istome putu". Kada je matematički pogled u više pojedinaca na istome putu ili jednak, govorimo o "kolektivnoj volji".

Pojava kolektivne volje jedno je od najvažnijih obilježja društvene faze izlaska svijesti. Spoznavajuća svijest više ne "živi" sama i izolirana u vlastitome svijetu osjetā, već "subjekt postaje svjestan svijeta koji dijeli s drugim pojedincima" [1, str. 67]. Svijet koji je subjekt sam stvorio može se razlikovati od svijeta koji dijeli neka grupa ljudi. Prilagođavanje ili "služenje" volji drugih tada znači prihvaćanje njihovoga svijeta ili svjetonazora. Brouwer govori i o "volji čovječanstva", što ćemo shvatiti kao poseban slučaj kolektivne volje, onaj koji uključuje sve činitelje.

> Među matematičkim pogledima nametnutima svim ljudskim bićima kolektivnom voljom čitava čovječanstva dominantnu ulogu igra uvođenje hipotetičkoga "objektivnoga svijeta prostora i vremena" kao zajedničkoga nosioca svih vremenskih nizova fenomenā svih pojedinaca [...]. [26, str. 421]

Prije treće faze izlaska svijesti govorili smo o svijetu osjetā ili svijetu percepcije i o vanjskome svijetu subjekta. Uvođenjem drugih činitelja sada možemo govoriti i o "objektivnome" svijetu, koji je rezultat voljne suradnje ili kooperativnoga djelovanja subjekta s drugima, možemo kazati "njegova rada za čovječanstvo". Vanjski svijet subjekta voljom drugih postaje vanjski svijet *simpliciter*.

Ovdje se pojavljuje zanimljiv fenomen. Čitavo čovječanstvo, dakle svi ljudi, nameću svoju volju čitavome čovječanstvu, svim ljudima, dakle samima sebi. Stoga izgleda da se volja čovječanstva može razlikovati od "početnih" pojedinačnih volja svakoga činitelja. To znači da volju grupe ne možemo svesti na zbroj individualnih volja članova grupe; možemo kazati kako se u društvenoj fazi izlaska svijesti vremenska i uzročna pozornost pripisuju grupama, a ne samo subjektu.

Kao primjere kolektivnih volja Brouwer navodi politička i vjerska udruženja. Posebne volje možemo nazvati i "posebnim ontologijama". Naime, neke grupe, kako bi se održale na okupu, svojim članovima nameću posebne propise i ideje, kao što su religijska uvjerenja, ali čak i pojmovi "domovine", "vlasništva" i "obitelji" [28, str. 47].

Sada na red dolazi Brouwerov opis interakcije među članovima grupa. Kako bi svoju volju nametnuli drugima ili naprosto stupili u suradnju, pojedinci moraju djelovati na druge, mora se dogoditi "isprepletanje prijenosa volje" (*wire-netting of will-transmission*) [11, str. 482]. Brouwer nudi objašnjenje mehanizma kolektivnoga djelovanja, od njegovih počekaka do oblika koji poznajemo danas.

> Na primitivnim razinama civilizacije i u primitivnim odnosima čovjeka s čovjekom [...] prijenos volje s pojedinca na pojedinca ostvaren je jednostavnim gestama ili primitivnim životinjskim zvukovima. Ali u razvijenijoj organizacij grupa [...] činovi koje treba nametnuti postaju previše diferenciranima i kompliciranima da bi se izazvali na tako jednostavan načim. Kako bi se u tim okolnostima mogla uz pomoć [...] (slušnih ili vidnih) signala i dalje usmjeravati razmjena, cjelina je zakona, dekreta, objekata i teorija vezanih uz činove popisane organiziranim pojedincima podvrgnuta uzročnoj pozornosti, *jezičnoj uzročnoj pozornosti*, a elementi matematičkoga sustava koji je rezultat te uzročne pozornosti označeni su *osnovnim jezičnim znakovima.* [11, str. 482, kurziv u originalu]

U ovome značajnome trenutku za spoznavalačku svijest subjekt uzročnom pozornosti druge pojedince proglašava djelatnicima ili činiteljima. Potom ti djelatnici formiraju grupe, koje uzročnom pozornošću donose stanovite zakone, dekrete i objekte svojih posebnih ontologija. Nadalje, ta se "pravila ponašanja" unutar grupe ponovno podvrgavaju uzročnoj pozornosti, ovaj put nešto složenijoj. Elementi zakonā, dekretā i objekata dovode se u blisku uzročnu svezu s osnovnim jezičnim znakovima. Osnovni se znakovi nakon toga podvrgavaju *gramatičkim* (ponovno uzročnim!) pravilima. Jednostavnije rečeno – nastaje jezik. Kod Brouwera je jezik nužno produkt društevoga čovjeka. Za njime se potreba javlja tek kada komunikacija jednostavnim zvukovima ili gestama postane nedovoljna kako bi se nastavila ili osigurala suradnja.

Napomenimo kako jezičnu uzročnu pozornost ne smatramo bitno različitom od "obične" uzročne pozornosti. Sve što smo kazali o potonjoj vrijedi i za prethodnu, uz razliku što su neki elementi jezične uzročne pozornosti, kao i znakovi i pravila njihove manipulacije, *novum* u svijetu osjetā subjekta. Isto tako, jezična uzročna pozornost nije bitna značajka društvene faze izlaska svijesti; subjekt s ostalim činiteljima može stupiti u suradnju i bez ili pak prije pojave jezika, kako je to bio slučaj "na primitivnim razinama civilizacije".

Prije no što kažemo nešto više o jeziku, recimo nešto o statusu drugih činitelja u svijetu subjekta. Naime, Brouwer u [11] iznosi "uznemirujuć" [71, str. 22] argument ili dokaz protiv postojanja "mnoštvenosti (*plurality*) uma" [11, str. 484–485]. Čini se kako postoje dva čitanja toga argumenta; možemo ga promatrati izdvojeno (kao u [71, 41, 46]), ali i u širem kontekstu Brouwerova poimanja jezika i komunikacije (kao u [5, str. 254]. Jedna od posljedica toga dokaza, međutim, ima izravan utjecaj na Brouwerovo poimanje jezika i komunikacije. Stoga ćemo Brouwerov argument promotriti posebno.

Brouwer započinje upitavši se na koji načim možemo okarakterizirati "ponašanje pojedinaca općenito". Nije razumno, kazuje Brouwer, to ponašanje ponašanje izvesti iz njihova "uma":

> Jer izborom ovoga termina subjekt je u svojem znanstvenome mišljenju naveden da u svakoga pojedinca stavi um sa slobodnom voljom koja ovisi o tome pojedincu i time sebe uzdigne na um drugoga reda koji doživljava nespoznatljive strane svijesti kao osjete. Quod non est. [11, str. 484]

Za Brouwera je "znanstveno mišljenje" podvrsta uzročnoga mišljenja "koja na ekonomičan i efikasan način katalogizira opsežne skupine kooperativnih uzročnih nizova" [11, str. 482]. U okviru Brouwerova filozofijskoga sustava pripisati um nekome pojedincu znači doživjeti neke osjete ili složevine osjetā [71]. U slučaju pripisivanja uma nekome pojedincu subjekt bi morao uzročnom pozornošću povezati osjet tijela toga pojedinca i osjet uma toga pojedinca. To znači da subjekt kao osjet ili složevinu osjetā može imati čitav um pojedinca u pitanju. To nam izgleda najspornijim dijelom Brouwerova dokaza. Imati osjet nekoga uma znači imati svojevrstan telepatski uvid u osjete toga uma. Kada u svakodnevnome govoru drugima pripisujemo umove, to činimo na temelju mnogo blažega kriterija. Obično pretpostavljamo kako drugi imaju umove i bez kakva uvida u njihova "intimna" mentalna stanja, već samo na temelju njihova ponašanja, najčešće nekom vrstom zaključka na najbolje objašnjenje. Kako smo naveli, čini se da subjekt u Brouwera upravo na takav način drugim pojedincima pripisuje volju, temeljem njihova “voljnolikoga” ponašanja. Pritom Brouwer kao uvjet ne navodi kako subjekt za takvo pripisivanje mora kao osjet imati čitavu volju drugih činitelja. Stoga se čini kako bi subjekt mogao drugima pripisati umove na sličan način, temeljem njihova “umnolikoga” ponašanja.

U svjetlu argumenta protiv opstojnosti drugih umova, ponudimo sada nešto detaljniju analizu mehanizma pripisivanja volje, kako bismo istražili može li se uspostaviti paralelizam između pripisivanja volje i pripisivanja uma. Volju drugima subjekt pripisuje poistovjećivanjem ili identificiranjem vlastitoga svrhovitoga djelovanja s ponašanjem ljudskih tijela u svojem vanjskome svijetu. Identifikacija se vrši između pojedinačnih činova subjekta i činova drugih. Pritom Brouwer ne zahtijeva da *svaki* čin drugih pojedinaca subjekt poistovjeti s nekim svojim činom. Međutim, sve što čini neki činitelj *može* biti poistovjećeno s nečim što čini subjekt, s time da, dodatno, mogu postojati činovi subjekta koje nije poistovjetio ni s čijim činovima, koji su, kažimo tako, originalni. Drugim riječima, uvođenjem “opsega volje” u Brouwerov diskurs možemo, čini se, smisleno govoriti o “volji unutar volje”. S druge strane, pojava uma unutar uma u okviru izlaska svijesti nije dopuštena.

Nešto detaljnijom analizom čini se da subjekt drugima pripisuje volju, odnosno da vrši identifikaciju svojih voljnih djelovanja s djelovanjem drugim činitelja, na “dobrohotan” način. Prikažimo grafički taj proces identifikacije. Pojedince ćemo označavati slovom I, a donji indeks služit će nam kako bismo ih razlikovali. Slovom O označavat ćemo složevine osjetā. Složevine osjetā s istom brojkom u donjem indeksu značit će složevine koje subjekt smatra jednakima, tj. one nad kojima je već proveo identifikaciju. Pritom treba imati na umu da su za subjekta ostali pojedinci također složevine osjetā. Tim više, sve na našoj grafici umska su stanja subjekta. Strelice će označavati uzročnu svezu. Naposljetku, subjekta ćemo označavati slovom S. Naš prikaz bit će pojednostavljen, no vjerujemo dovoljan u svrhu pokazivanja subjektova “dobrohotnoga” pripisivanja volje drugima.

$$
\begin{aligned}
&O_1 \longrightarrow S \overset{volja}{\longrightarrow} O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_3 \longrightarrow O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_4 \longrightarrow O_2
\end{aligned}
$$

Ovdje vidimo složevinu osjetā O_1 koja subjekta potiče na uzročno djelovanje, te on svojim djelovanjem uzrokuje složevinu osjeta O_2. Uz to, subjekt doživljava još četiri druga pojedinca kao uzročno povezana s istim (ili identificiranim) složevinama osjetā. Složevina O_1 dovedena u uzročnu svezu s pojedincem I_1 dovodi do osjeta O_2. Isto (slično) subjekt doživljava i s pojedincima I_2, I_3 i I_4. Na temelju toga instancije složevina osjetā O_2 subjekt proglašava "činovima tih drugih pojedinaca" [11, str. 482]. No, subjekt je samo u jednome od pet slučaja zaista doživio čin "u pravome smislu", odnosno čin kao djelovanje pod utjecajem volje, u slučaju u kojem je sâm djelovao. U ostalim četirima slučajevima subjekt vidi tek pravilnosti. Izgleda čak da subjekt u našem primjeru ima više razloga sebi odreći volju nego je drugima pripisati. Kako to ne čini, kazali smo da je dobrohotan.

Vratimo se sada na usporedbu pripisivanja volje i pripisivanja uma. Budući da Brouwer spominje "um sa slobodnom voljom", možemo prethodni prikaz modificirati:

$$
\begin{aligned}
&O_1 \longrightarrow S \xrightarrow{um} O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_3 \longrightarrow O_2\\
&O_1 \longrightarrow I_4 \longrightarrow O_2
\end{aligned}
$$

Pitamo se sada može li subjekt svoje *umske* činove identificirati s onima koje doživljava kao uzročno povezane s drugim pojedincima. Nije jasno zašto Brouwer ne razmatra takvu mogućnost. Po svemu sudeći, takav zaključak za njega ne bi bio legitiman. Razlog je tomu vjerojatno što je pojam uma u Brouwera mnogo "bogatiji" nego pojam volje. Makar smo vidjeli kako je um ovisan o volji, on ima, takoreći, više dijelova. Osim vjerovanja, u njemu se se nalaze i želje i zazori te posebni odnosi jastvenosti i otuđenosti. Iz pukoga djelovanja nekoga pojedinca ne možemo zaključiti koje su emocije, vjerovanja i stupanj jastvenosti iza toga djelovanja. Sve što možemo kazati jest da se radi o voljnome djelovanju. Dakle, u Brouwera na temelju djelovanja nekome elementu objekta možemo pripisati volju, ali ne i um. Dodajmo kako bi subjekt, čak i kada bi um drugima mogao pripisati temeljem sličnosti sa svojim djelovanjem, to ponovno trebao učiniti na dobrohotan način.

Izgleda da Brouwerovu spornu premisu o osjetu drugih umova ne možemo oslabiti po uzoru na njegovo objašnjenje pripisivanja volje ostalim činiteljima. Također, nije jasno bismo li tu premisu mogli oslabiti i na koji drugi način, a pritom ostajući unutar okvira Brouwerove teorije izlaska svijesti, u kojoj postoje samo vremenska i uzročna pozornost.[11] Stoga subjekt, da bi pripisao um nekome činitelju, mora "na umu" ima vlastite osjete, među kojima je i osjet tijela drugoga činitelja, ali i čitav um činitelja u pitanju.

Um koji misli neki drugi um, nastavlja Brouwer, um je drugoga reda. Brouwerov je dokaz *reductio*. Pretpostavimo postojanje uma unutar uma.

[11] Ono što još moramo opisati jest subjektova sposobnost *matematičke apstrakcije*, no ona nije vezana uz problem spoznavanja drugih činitelja.

> [Š]to bi [...] imalo za posljedicu da bi um drugoga reda uzročno mislio o umnoženome (*pluralified*) umu prvoga reda, tada kooperativno proučavao znanost umnoženoga uma, i kao posljedicu toga proučavanja pridružio um drugoga reda s osjetima stranih svijesti drugim pojedincima, time se ponovno uzdižući, taj put na um trećega reda. I tako dalje. Usque ad infinitum. [11, str. 484]

Dakle, kada bismo pretpostavili da subjekt može misliti umove drugih činitelja, to bi dovelo, ne do kontradikcije, već do beskonačnoga regresa. Također, Brouwer prešutno pretpostavlja kako se radi o *poročnome* regresu. Zašto je tako, istražit ćemo u ovome poglavlju nešto kasnije. Sam način na koji Brouwer izvodi taj regres, tvrdit ćemo sada, nije nesporan. Vjerujemo kako je tomu tako dijelom zbog Brouwerova sažetoga stila izražavanja. Zato ćemo najprije istražiti što Brouwer točno želi kazati uporabom nekih sintagma. "Umnožen um prvoga reda", čini se, znači tek "mnoštvenost umova prvoga reda". "Znanost" i ovdje možemo shvatiti kao "znanstveno mišljenje". Ono što vodi do regresa jest, kazuje Brouwer, "kooperativno proučavanje znanosti umnoženoga uma". Međutim, izgleda da tu Brouwerovu tvrdnju možemo shvatiti na dva načina.

Prema prvome tumačenju, "znanost o mnoštvenosti umova prvoga reda" postoji te njezinim detaljnijim izučavanjem subjekt shvaća da i drugim činiteljima mora pripisati umove istoga reda. Ako je tako, Brouwer nam ne kazuje koja točno teza te znanosti navodi subjekta da izvrši pripisivanje, pa u njegovu dokazu postoji prešutna i nepoznata premisa. Protiv prvoga tumačenja govori činjenica da će Brouwer kasnije ustvrditi kako zbog nedostatka mnoštevnosti uma, takva znanost ne postoji [11, str. 485]. Stoga ne izgleda vjerojatnim kako je Brouwer htio kazati da će znanost o umnoženome umu subjekta ičemu poučiti.

Prema drugome tumačenju, "znanost umnoženoga uma" ne postoji, već sâm čin "kooperativnoga proučavanja" te tobožnje znanosti vodi do regresa. Ovdje veću pažnju treba posvetiti prilogu "kooperativno". Uvođenjem drugih umova um svoju suradnju može proširiti i na aktivnost mišljenja, odnosno može "su-misliti" s drugima. Subjekt tada s drugim činiteljima izvodi znanstveno mišljenje, odnosno "na ekonomičan i efikasan način katalogizira opsežne skupine kooperativnih uzročnih nizova". Brouwerova prešutna premisa ovdje je, čini se, da je suradnja moguća samo ako se odvija između umova istoga reda. Stoga je subjekt kao um drugoga reda činiteljima s kojima ostvaruje suradnju, a na temelju same mogućnosti te suradnje, primoran pripisati umove onoga reda kakav sâm posjeduje. No, to bi značilo da subjekt kao sadržaj uma ima umove drugoga reda, što bi ga učinilo umom trećega reda. Sada je subjekt koji pokušava ostvariti suradnju s drugima subjekt s umom trećega reda, a ta je suradnja moguća samo ako pojedinci s kojima subjekt surađuje imaju umove istoga reda kao i sâm. Stoga im subjekt mora pripisati umove trećega reda, čime postaje umom četvrtoga reda. Imamo beskonačan regres.

Izgleda dakle da, prema Brouweru, do beskonačnoga regresa dolazi tek *suradnjom*. Nama se ipak na prvi pogled čini kako se beskonačan regres može izvesti i bez pozivanja na kooperativno mišljenje ili djelovanje, ostajući samo u sferi subjektova uzročna mišljenja. Pokušajmo zato pojednostaviti taj dio Brouwerova dokaza. Pretpostavimo da subjekt nekome činitelju želi pripisuje um *kakav ima on sâm*. U protivnome, status subjektova uma bio bi izdvojen [71, str. 24]. Budući da subjekt, imajući um prvoga reda kao osjet ustanovljuje da je njegov um drugoga reda, subjekt činitelju mora pripisati um drugoga reda. Time subjektov um postaje umom trećega reda, kakav bi nadalje i činitelj trebao imati. Time dolazimo do regresa i bez spominjanja znanstvenoga mišljenja ili suradnje među djelatnicima. Ostavit ćemo otvorenim pitanje u kolikoj je mjeri pojam suradnje relevantan za izvod nepostojanja više umova. Srž je Brouwerova dokaza, smatramo, tvrdnja da ideja "pripisivanja uma" vodi do nepoželjnih posljedica.

Nije posve jasno kako i koliko ozbiljno shvatiti Brouwerov argument. Budući da pretpostavka dugih umova vodi do beskonačnoga regresa, čini se kako je um subjekta *jedini* um. Mnogi su u literaturi pretpostavili da je subjekt u pitanju nitko drugo nego – sam Brouwer. Štoviše, u sekundarnoj se literaturi često navodi kako je Brouwer bio solipsist ili barem kako je imao "solipsističke sklonosti" (vidi primjerice: [1, 37, 41, 50, 65, 67]). Možda nije naodmet napomenuti da Brouwer nije nikada, koliko nam je poznato, sam za sebe kazao kako je solipsist. Razlog da ga se takvime proglase mogu biti, ponovno koliko nam je poznato, samo dva mjesta u njegovim radovima. Prvo je gore izneseni argument. Drugo, vidno eksplicitnije mjesto, nalazimo u djelu koje je nastalo čak pola stoljeća ranije.

Radi se o [25], sastavku koji je Brouwer trebao napisati kako bi pristupio Remonstrantskoj crkvi, posebnoj denominaciji unutar protestantizma. Valja imati na umu da satavak Brouwer pisao sa svega 17 godina, no klica njegove kasnije filozofije već je tada prisutna.

> Jedina je istina za mene moje jastvo ovoga trenutka, okruženo bogatstvom slika u koje jastvo vjeruje i koje uzrokuju život jastva. Nema smisla pitati jesu li te slike "istinite"; one postoje samo za moje jastvo i kao takve one su stvarne. Ne postoji druga stvarnost, koja bi bila neovisna od moga jastva i odgovarala tim slikama. Moj je život ovoga trenutka moje uvjerenje moga jastva i moje vjerovanje u moje slike. [...] Slike koje su mi dane sadrže u sebi između ostaloga i mogućnost postojanja drugih jastava s njihovim vlastitim

slikama; ali ona nisu stvarna, ona su dio mojih slika, dakle mene. [25, str. 391]

Za razliku od argumenta u [11], Brouwer u gornjem navodu piše u prvome licu. No, ne govori samo o sebi. Osim njegova jastva, Brouwer spominje i "svojega boga" [25, str. 391], koji je izvor njegova opstojanja i njegovih "slika". Međutim, sastavak iz kojega smo citirali nije zamišljen kao filozofsko djelo. U gornjem navodu nalazimo prije *stav* nego struktururani argument. Makar tamo možemo uočiti naznake i nagovještaj njegove kasnije filozofije, mi Brouwerov "rani solipsizam" nećemo detaljnije analizirati. Dodatan je razlog tomu što Brouwer u sastavku ne spominje pojmove uma i volje, kao ni faze izlaska svijesti.

Istražimo radije povezanost Brouwerova argumenta iz [11] s jednim "modernijim" fenomenom – zajedničkim znanjem (*common knowledge*). Naime, u tome "solipsističkome" argumentu možemo nazrijeti upravo kritiku pojma koji je, riječima Fagina *et al.* [44, str. 2], potreban za razumijevanje znanja činiteljā unutar grupe. Vidjeli smo kako Brouwer kao ključan pojam u dokazu rabi termin "znanstveno mišljenje". U kontekstu analize zajedničkoga znanja, shvatimo sada "znanstveno mišljenje" jednostavno kao – znanje. *Mutatis mutandis*, sada govorimo o *znanju* višega reda. U takvome tumačenju, Brouwer tvrdi kako nas uvođenje znanja drugoga reda, tj. znanja o znanju nekoga drugoga, prisiljava da uvedemo i znanje trećega i svih viših redova, kao i da takva znanja pripišemo svim činiteljima, a tada smo dobili kolektivno znanje, i to u skladu s Lewisovom karakterizacijom ovoga fenomena u [68]. Štoviše, u formalnim prikazima kolektivnoga znanja (usp. [44, 70]) beskonačan regres dio je same definicije općega znanja. Taj korak Brouwer ne podržava.

To, smatramo, ne mora biti zato što prisustvo "nečega besonačnoga" u dokazu smatra problematičnim. To bi ga, uostalom, u kontektu matematike učinilo *finitistom*, što nije slučaj, kako ćemo vidjeti uskoro. Problem je, naime, u tome što rabimo *beskonačnost* rezonirajući o *konačnim* domenama osjetā. Pretpostavivši suradnju, razumijevanje ili *konvenciju* (usp. [68]) subjekt sebi i drugima pripisuje znanja beskonačnoga reda, koja se ne mogu ostvariti u konačnim umovima. Ovo je sukladno Brouwerovu poimanju logike, točnije njegovu razlikovanju logike koja opisuje beskonačne domene od one koje donosi opis konačnih domena, što je, između ostaloga, tema potpoglavlja 2.12.

Argument protiv postojanja drugih umova u literaturi se često promatra izdvojeno. Stoga smo se i mi odlučili za takvu analizu. Ipak, taj se argument u [11] javlja u širem kontekstu opisa jezika i komunikacije. Prema van Attenu i Tragesseru [5], primjerice, solipsistička konkluzija koju Brouwer izvodi ima smisla isključivo unutar širega okvira njegovih stavova o jeziku kao mediju za prenošenje misli. Osim toga, iz gore iznesenoga “uznemirujućega” argumenta Brouwer izvodi dodatne zaključke o komunikaciji subjekta s ostalim činiteljima. Zato ćemo sada nastaviti s iznošenjem Brouwerove karakterizacije jezika kao bitne značajke društvene faze izlaska svijesti.

Osvrnimo se stoga na misaoni život subjekta prije treće faze izlaska svijesti. Kada smo govorili o najdubljem domu, kazali smo kako ćemo lakše shvatiti što on jest jednom kada vidimo što on *nije*. Isto vrijedi i za faze svijesti. Iako do društvene etape nismo govorili o jeziku, čitatelj je mogao s pravom pretpostaviti da se misaoni život subjekta odvija jezično. Tek na kraju izlaska svijesti vidimo da je veći dio razvoja svijesti nejezičan, odnosno da postoji *predjezična* misao. Ono što je karakterisično za Brouwera njegova je teza da je upravo takva misao “autentična” [5, str. 254] i nepatvorena.

Ovdje valja napomenuti da zasad govorimo samo o prirodnome jeziku, o formalnim jezicima bit će govora nešto kasnije, no i ondje su Brouwerovi stavovi poprilično slični. Isto tako, Brouwer ne govori samo o jeziku, već i o *jezicima*. To treba shvatiti na uobičajen način. Kako smo vidjeli, jezik nastaje kako bi se mnoštvenost i raznolikost volja bolje konsolidirala; on je proizvod ljudske težnje za što boljom organizacijom i što učinkovitijom suradnjom. Stoga se Brouwer ponekad koristi terminom “jezik suradnje” [11, str. 484].

Međutim, jezik, proizvod suradnje, ima brojne nedostatke. Iako nastaje kako bi osigurao prijenos volje s pojedinca na pojedinca, on ne uspjeva u izvršavanju svoje zadaće, ponajprije iz razloga što je “u svakodnevnoj praksi potrebno mnogo više elementarnih pojmova (*notions*) no što postoji riječi i načinā povezivanja riječî u jeziku [26, str. 422]. Mentalni život subjekta, njegova vjerovanja nastala uzročnom pozornosti, njegove želje i bojazni, u ovoj ili onoj mjeri otuđeni objekti u njegovome vanjskome svijetu, previše su “suptilno nijansirani” [27, str. 401] da bi se mogli izrazili u jeziku.

Jednako tako, te suptilne nijanse, koje su dio “žive stvarnosti” (*living realitiy*) [27, str. 401] subjekta, u jeziku se izražavaju riječima koje vrijede za *sve* činitelje. Stoga je posebna uloga subjekta, ono što, takoreći, stoji iza njegovih riječi, u kooperativnome jeziku zanemarena. Brouwerovim riječima:

> [U] jeziku suradnje [...] uloga dodijeljena subjektu-pojedincu [...] analogna je onoj dodijeljenoj objektima-pojedincima, gdje je sam subjekt u njemu [jeziku suradnje] ignoriran. Na taj način civilizirani jezici, bivajući većinom kooperativnim jezicima, sugeriraju jednakost potpuno različitih fenomena, kao što su činovi subjekta i činovi objekta. A ta je sugestija pojačana varljivim pojmovima koje civilizirani jezici rabe kako bi opisali ponašanje pojedinaca općenito. [11, str. 484]

Dakle, ne samo da riječi, izrazi i rečenice ne mogu "zahvatiti" složen mentalni život subjekta, već one mogu učitati previše, istim pojmom opisati "živo" ponašanje subjekta i nekoga njegova elementa objekta. Time postaje upitno koliko jezik može pridonijeti "isprepletanju prijenosā volja":

> Jezik može biti samo pratnja već postojećemu međusobnomu razumijevanju. Čak i kada dvoje ljudi dijele iste nade i težnje, oni će biti u stalnoj opasnosti da ih njihove nekontrolirane želje odvedu na različite sporedne putove i da se udalje; trpjet će bol i tjeskobu u borbi za održavanjem zajedništva. [...] U svakodnevnome životu jezik ima smisla isključivo kao sredstvo za održavanje dviju već usklađenih volja zajedno na istome putu. [27, str. 401–402]

Vidimo kako je za Brouwera jezik nesavršen i varljiv medij, koji ne može poslužiti potpunome razumijevanju. Tako manjkav alat ne može rezultirati istinskom komunikacijom i polučiti međusobno razumijevanje.

> Komunicirati svoje misli nekome znači utjecati na njegove činove. Složiti se s nekim znači biti zadovoljan s njegovim kooperativnim činovima ili stupiti u savez. Razrješavanje nesporazuma znači popraviti isprepletanje prijenosa voljā u nekoj suradnji. Takozvanom razmjenom misli s drugim bićem subjekt samo dodiruje vanjski zid automata. To se teško može nazvati međusobnim razumijevanjem. [11, str. 485]

Van Atten i Tragesser [5] smatraju kako upravo u ovome kontekstu treba shvatiti Brouwerov argument protiv pluraliteta uma. Ne postoji istinska razmjena mislî, subjekt je u svojem mentalnome životu, možemo kazati, usamljen. Subjekt svoj umski sadržaj ne može u pravome smislu ni s kime podijeliti; koristeći se jezikom, najviše čemu se može nadati jest da će na pojedince objekta izvršiti neki utjecaj, i to pisanom riječju ili glasom, za razliku od utjecaja na ostale elemente objekta, na koje djeluje nejezičnom uzročnom pozornošću.

Iz svojega "solipsističkoga argumenta" (i tvrdnji o prirodi jezika i komunikacije) Brouwer zaključuje: "U nedostatku mnoštvenosti uma, *ne postoji ni razmjena misli.* Misli su neodvojivo povezane sa subjektom" [11, str. 485, kurziv u originalu]. Subjekt ne može pristupiti drugim umovima jer nema za to potrebne spoznajne alate. Pretpostavka da je takav pristup moguć vodi do beskonačnoga regresa. Van Atten i Tragesser Brouwerov solipsizam zato nazivaju "epistemičkim solipsizmom" [5, str. 254].

Prostor za međusobno razumijevanje i istinsku komunikaciju u Brouwerovoj teoriji svijesti ipak postoji. Međutim, sfera nepatvorene komunikacije i dubljega razumijevanja drugoga nije um, već *duša*. U [27, str. 403] Brouwer govori o "komunikaciji duše s dušom", dok u [11, str. 485] govori o "osjetu duše drugoga". Ti osjeti ne mogu se prenijeti jezikom, oni se doživljavaju neposredno. Prisjetimo se, duša je za Brouwera cjelina jastvenih osjeta vezanih uz nekoga pojedinca. Jastveni, odnosno potpuno jastveni osjeti subjekta oni su osjeti koji su potpuno okrenuti k njegovu sebstvu ili od kojih subjekt, ako se i odmakao, odmakao se potpuno povratno. S druge strane, jezik je, kao podvrsta uzročne pozornosti, usmjeren na vanjski svijet, on služi kako bi se utjecalo na specifične otuđene složevine osjetā, tijela činitelja ili pojedince.

O duši Brouwer još kazuje kako je "prilično skrivena, ali očituje se u osjetima vokacije i inspiracije" [11, str. 480–481]. Isto tako, istinsko je međusobno razumijevanje, osjet duše drugoga, rijetkost, ali mogućnost. Stoga Franchella [45, str. 208] Brouwerov solipsizam naziva "teoretskim solipsizmom, koji je ublažen "živim" iskustvom drugih ljudi. Postoji zanimljiv primjer koji bi mogao potvrditi da Brouwer o osjetu duše drugih nije govorio samo teoretski. Naime, u jednome trenutku svoje karijere Brouwer je imao optimističnije stavove prema jeziku kao mediju komunikacije. To ga je nagnalo da s nekoliko kolega osnuje tzv. "signifički (*signific*) pokret". Pokret, nažalost, nije zaživio, no u [22, str. 469] Brouwer izvještava kako im svima "ostaje duboko sjećanje međusobne *jastvenosti*".

Stoga za subjekta, ali i za samoga Brouwera, drugi ljudi ne moraju ostati tek hladni "automati", s kojima nema međusobnoga razumijevanja:

> Samo kroz osjet duše drugoga ponekad je doživljen dublji pristup. I kada mudrost otkrivena ljepotom ovoga osjeta nađe izričaj u antifoniji izmijenjenih riječi, tada može biti međusobna razumijevanja. Osim duše svaki je ekspoze smisla i biti života solilokvij [...]. [11, str. 485]

Usporedimo to sa samim početkom rada, gdje Brouwer iznosi *caveat* koji, ako uopće, čitatelju postaje jasan tek kasnije:

> Prije svega treba ponuditi prikaz faza kroz koje svijest mora proći u svojem prelazu iz svojega najdubljeg doma prema vanjskome svijetu u kojem surađujemo i tražimo međusobno razumijevanje. Ovaj prikaz ne implicira međusobno razumijevanje i može na neki način ostati solilokvijem. Isto se može kazati i za neke druge dijelove ovoga predavanja.

Time smo završili obrazloženje faza svijesti. Sada već možemo govoriti o "izašloj" ili "potpuno razvijenoj" svijesti. Pretpostavljajući pojmovnu strukturu izloženu u prethodnim potpoglavljima, prelazimo na analizu posebnih dijelova Brouwerove filozofije.

2.9 Matematika u izlasku svijesti

Ovdje govorimo o vjerojatno najpoznatijem dijelu Brouwerove filozofije – njegovu poimanju matematike. O matematici smo odlučili detaljnije govoriti *nakon* opisa svih triju faza izlaska svijesti ponajprije kako bismo taj važan fenomen u misaonome životu subjekta stavili u što širi kontekst. Na taj način, znajući koliki je "razvojni kapacitet" svijesti, odnosno dokle ona dolazi u svojem izlasku, moći ćemo jasnije prikazati koje su kategorije svijesti potrebne, a koje nisu, kako bi se u njoj mogle odviti matematičke konstrukcije. Glavni je cilj ovoga potpoglavlja, vezano uz našu cjelokupnu analizu izlaska svijesti, ponuditi odgovor na pitanje u kojoj se fazi izlaska svijesti pojavljuje matematika. Tvrdit ćemo da Brouwer ne nudi jednoznačan odgovor na to pitanje.

Najprije ćemo iznijeti standardno tumačenje Brouwerova mjesta za matematiku unutar procesa izlaska svijesti, zatim ponuditi drukčiju interpretaciju utemeljenu na [17], [28], [26] i [11], a potom iznijeti još jedno nestandardno tumačenje, utemeljeno na van Dalenovu tumačenju Brouwerove intuicionističke matematike. Nakon toga govorit ćemo o nekim značajnim aspektima intuicionizma kao filozofske teorije o prirodi matematike.

U kojoj se fazi izlaska svijesti dakle pojavljuje matematika[12]? Standardan je odgovor da se matematika u Brouwera pojavljuje već u prvoj fazi izlaska svijesti. Razlog takvomu tumačenju možemo pronaći već u dvjema definicijama koje smo iznijeli u Uvodu. U [16] navodi kako matematika ima porijeklo u percepciji protoka vremena, dok u [17] govori kako je intuicija matematike intuicija "čistoga dvo-jedinstva", ili, terminologijom [11], "dvojstva". Kako je subjekt za matematiku sposoban samo temeljem vremenske pozornosti smatraju, primjerice, van Atten i Tragesser [5, str. 177] koji kazuju kako je "bavljenje matematikom jedna od prvih stvari koja je povela svijest iz njezina najdubljega doma". Nadalje, Posy [72, str. 134] navodi kako "[m]atematika počinje kada misleći subjekt razazna različite osjete", dok van Stigt [81, str. 138] navodi kako svijest "sposobnošću održavanja i povezivanja stvara svoj prvi objekt, broj dva".

Mi ćemo pak tvrditi kako se matematika za Brouwera ne javlja nužno u prvoj fazi izlaska svijesti. Povod je za takvo tumačenje, prije svega, što sam̂ Brouwer u djelima koja detaljno tematiziraju izlazak svijesti [28, 26, 11] matematiku ne smješta u prvu fazu. Štoviše, o matematici u izlasku svijesti Brouwer u [11] govori gotovo usput. Slično tomu, u [28] i [26], premda matematiku izdvaja kao posebnu sposobnost, Brouwer je opisuje tek nakon prve faze izlaska. U suprotnosti s gornjima trima navodima koji predstavljaju

[12] Zasad nećemo praviti razliku između klasične i intuicionističke matematike, a sam pojam "matematika" shvatit ćemo u užem smislu, za razliku od smisla u kojem se javlja u sintagmi "matematičko mišljenje".

standardno tumačenje tvrdit ćemo da Brouwer ne kazuje kako svijest već u prvoj fazi izlaska izvodi ikakvu matematičku konstrukciju. Smatramo kako unutar šire slike izlaska svijesti postoji razlika između *mogućnosti* matematike i trenutka, odnosno faze u kojoj se ona *zaista pojavljuje* u procesu razvoja misaonoga svijeta subjekta. Tvrdnja da je za matematiku u užem smislu potrebna samo vremenska pozornost ne mora nužno značiti da matematika i vremenska pozornost nastaju u istoj fazi izlaska svijesti. Za matematiku u prvoj fazi možda još, takoreći, nema potrebe.

U [28, str. 45] i [26, str. 418] Brouwer subjektovu sposobnost da se bavi matematikom naziva fenomenom "matematičke apstrakcije", koji razlikuje od fenomenā matematičkoga pogleda i nametanja volje znakovima. O matematičkome pogledu već smo govorili. Tada smo napomenuli i da pojam "matematika" unutar te sintagme treba shvatiti u širem smislu, kao proučavanje svega što je egzaktno. U matematički pogled spadaju vremenska i uzročna pozornost, kao i uzročno djelovanje subjekta utemeljeno na tim pozornostima. Matematičku apstrakciju Brouwer spominje tek kasnije i u kontekstu subjektove uzročne pozornosti:

> [T]ek na najvišim razinama civilizacije matematička aktivnost dostiže svoju potpunu zrelost; to je postignuto matematičkom apstrakcijom, koja lišava (*divests*) dvojstvo svakoga sadržaja ostavljajući samo njegov prazan oblik kao zajednički supstrat svih dvojstava. Taj zajednički supstrat svih dvojstava oblikuje prvobitnu (*primordial*) intuiciju matematike [...]. Moć matematičke apstrakcije temelji se na ljudskome iskustvu da je mnoge uzročne nizove lakše kontrolirati, ako se njihove prazne apstrakcije uzmu kao parcijalni sustavi opsežnijih, ali podesnijih (*manageable*) matematičkih sustava. [26, str. 419–420]

U istome djelu, kako smo već ranije iznijeli, Brouwer navodi kako je jedino opravdanje matematičke pozornosti "oportunost matematičkoga čina" [str. 419]. Brouwer je u [11] sintagmu "matematička aktivnost" zamijenio sa "umješna (*cunning*) aktivnost". Izdvojen citat navodi nas na tumačenje prema kojem subjekt u svojoj težnji za što efikasnijim djelovanjem "otkriva" matematiku. Budući da je tada već sposoban za uzročno djelovanje, subjekt razvija sposobnost matematičke apstrakcije "tek" u drugoj fazi izlaska svijesti.

U prilog takvomu "nestandardnome" tumačenju ide, smatramo, Brouwerov govor o "najvišim razinama civilizacije". Slična, "povijesna objašnjenja", prisjetimo se, Brouwer rabi u [27], spominjući davno izvorno stanje čovjeka u kojem je živio sam; kao i u [11], kada govori o razvoju civilizacije koji je rezultirao nastankom jezika. Nije posve jasno trebamo li Brouwerova povijesna objašnjenja shvatiti u doslovnome ili prenesenome značenju. Ipak, u gornjem navodu Brouwer implicira kako su postojala (ili su barem zamisliva) manje razvijena društva u kojima ljudi izvode činove utemeljene na uzročnoj pozornosti, a da još nisu razvili sposobnost matematičke apstrakcije. Članovi takvoga društva, u suprotnosti primjerice s gornjim navodom van Attena i Tragessera, izašli su iz najdubljega doma ne baveći se matematikom. Oni su živjeli, mislili i (grupno) djelovali bez poznavanja brojeva. Čini se dakle kako je "kontekst otkrića" matematike mogao biti njezina primjena u težnji za što efikasnijim djelovanjem.

Slično, u [11] Brouwer u opisu izlaska svijesti matematiku uvodi tek razradom jedne vrste uzročne pozornosti:

> Sustavi uzročnoga mišljenja u osnovi [...] kooperativnih uzročnih činova su mnogo kompliciraniji od onih koji potiču pojedinačne uzročne činove. Među prvima istaknuto mjesto zauzima *znanstveno mišljenje*, koje na ekonomičan i učinkovit način katalogizira opsežne skupine kooperativnih uzročnih nizova. I to znanstveno mišljenje, posebice kada se bavi tehnikom, osnovano je na *matematici*. [11, str. 482]

U gornjem navodu Brouwer matematiku, prema obziru na proces izlaska svijesti, spominje i kasnije no u [28] i [26], tek u trećoj fazi izlaska svijesti, taj puta ju ne izdvajajući kao neku posebnu sposobnost ili pozornost. Stoga kontekst otkrića matematike može biti i kolektivna težnja za što djelotvornijim (kolektivnim) uzročnim činovima. Potvrdu "kasne" pojave matematike pronalazimo u [17, str. 123], gdje Brouwer navodi kako je "matematika svoje mjesto u ljudskoj misli izvorno zauzela kao dio znanosti". Nadalje, u [27, str. 396] Brouwer nam kazuje kako je "[z]nanost u svojem izvornome obliku bila potpuno podređena industriji".

Prema našem tumačenju, matematika duguje svoj nastanak "oportunosti" uzročnih činova. No, to ipak ne znači da se subjekt izvodeći matematičke konstrukcije koristi uzročnom pozornosti, a posebice ne jezičnom uzročnom pozornosti. Subjekt je *sposoban* za "čistu matematiku" već na temelju svoje vremenske pozornosti, dakle već u u prvoj fazi izlaska svijesti, makar za matematičke konstrukcije tada možda nema *razloga* ili *motivaciju.*

Postoji i strože tumačenje mjesta matematike unutar faza svijesti, koje je implicitno sadržano u van Dalena u [35, 39]. Prema našem shvaćanju van Dalenove interpretacije, matematika i nije moguća u prvoj fazi izlaska svijesti. Ovdje je važno napomenuti da van Dalen zastupa mišljenje kako Brouwer pojam "matematika" rabi isključivo u širem smislu, onomu koji odgovara nizozemskoj riječi *wiskunde*, kao "znanost ili umijeće onoga što je sigurno" [35, str. 215]. Za razliku od njega, van Atten [1] smatra kako Brouwer riječ "matematika" poima u širem smislu samo u svojim filozofičnijim radovima prije [11]. Temeljem svojega širega poimanja Brouwerove matematike van Dalen može tvrditi:

> Ulogu [...] usustavljivanja sfere uzročnih nizova Brouwer pripisuje matematici. [...] Uzevši nastanak prirodnih brojeva kao posebnoga uzročnoga niza, možemo matematiku nazvati mentalnom konstrukcijskom aktivnošću koja se bavi uzročnim nizovima. U ovome (brouwerovskome) smislu matematika je općenita sustavna disciplina koja se legitimno bavi svime. [35, str. 215–216]

Prisjetimo se, uzročna pozornost izvodi *identifikaciju* ili poistovjećivanje osjetā, tvoreći od vremenskih nizova osjetā uzročne nizove. Drugim riječima, svi nizovi nastali procesom identifikacije jesu uzročni nizovi. Dodatna, mnogo važnija posebnost van Dalenova tumačenja sastoji se u tome što on proces koji Brouwer u [28] i [26] naziva matematičkom apstrakcijom vidi tek kao poseban slučaj identifikacije. Naime, subjekt, vršeći identifikaciju nad dvama osjetima, apstrahira od *nekih* svojstava tih osjeta, ostavljajući ona po kojima ih smatra sličnima ili jednakima. Lišavanje dvojstva *svakoga* sadržaja, ostavljajući samo zajednički supstrat svih dvojstava za van Dalena je "rigorozna apstrakcija" [35, str. 213], "maksimalna apstrakcija" [36, str. 4] ili "posljednja (*ultimate*) apstrakcija koja poštuje različitost (*distinctness*)" [39, str. 9]. Van Dalen i strogo matematičke objekte, poput skupa prirodnih brojeva, naziva uzročnim nizovima. Budući da uzročni nizovi naposljetku nastaju uzročnom pozornošću, matematika je rezultat uzročne pozornosti.

Prema našem saznanju, van Dalen je jedini koji zastupa Brouwerovo "uzročno shvaćanje" matematike. No, čini se kako ne moramo u potpunosti prihvatiti van Dalenovu interpretaciju, složivši se s njime samo u tome da je uzročna pozornost nužna za bavljenje matematikom. Matematiku bismo mogli razumjeti u užem, van Attenovu smislu, a za sposobnost subjekta da izvodi matematičku apstrakciju tvrditi, po uzoru na van Dalena, kako se razvila iz njegove sposobnosti identifikacije. Pritom se ne moramo obvezati na tvrdnju da su objekti matematike u užem smislu zaista uzročni nizovi. Uzročni nizovi, prema "oslabljenome vandalenovskome tumačenju", samo su oni nizovi nastali "djelomičnom apstrakcijom". Matematički objekti nastaju "potpunom apstrakcijom", a takva je apstrakcija mogla nastati tek kada je misleći subjekt potpuno ovladao procesom identifikacije, koji je stekao fenomenom uzročne pozornosti. Stoga se matematika ne bavi uzročnim nizovima, ali njezini objekti nastaju temeljem uzročne pozornosti. U obje verzije vandalenovskoga tumačenja subjekt za matematiku i nije sposoban prije druge faze izlaska svijesti.

2.10 Brouwerova intuicionistička matematika

Glavna je tema ovoga potpoglavlja Brouwerova karakterizacija *intuicije*, prema kojoj se njegova filozofija matematike naziva "intuicionizam". Ovdje ćemo nastojati ponuditi razloge za taj naziv. U opisu izlaska svijesti nismo govorili o intuiciji ili intuicijama, već o osjetima i složevinama osjetā. Premda je svijest svakim korakom dalje od najdubljega doma stjecala nove pozornosti, njezin primaran i jedini sadržaj bili su osjeti, kao osnovne gradivne jedinice svijeta subjekta. No, osjeti nisu jedina vrsta sadržaja koji svijest može imati. Na to upozorava van Atten u [1], koji kazuje kako se stanja svijesti, osim po svojoj "udaljenosti" od najdubljega doma, tj. po fazama, mogu razlikovati i po "osnovnoj strukuri njihova sadržaja", pa možemo govoriti i o "vrstama svijesti" [1, str. 68]. Van Atten navodi kako postoje tri ili četiri vrste svijesti: mirnoća, osjetna svijest, matematička svijest i (možda) mudrost.

Mirnoću kao vrstu svijesti spominjali smo u opisu najdubljega doma. Sada, prema van Attenovoj analizi, možemo dodati kako u najdubljem domu postoje dvije vrste svijesti: osjetna svijest i mirnoća. Izlaskom iz najdubljega doma mirnoća nestaje. Valja pritom napomenuti kako svijest u najdubljem domu nije u stanju potpune mirnoće, kako to, primjerice, navodi van Stigt u [81, str. 136]. Nadalje, vremenski, uzročni i jezični nizovi sastoje se od osjeta, pa su stoga produkt osjetne svijesti. O mudrosti ovdje nećemo govoriti. Posvećujemo pozornost matematičkoj vrsti svijesti, odnosno svijesti koja kao svoj sadržaj ima matematičke entitete. Upravo to je vrsta svijesti koja se razvija iz intuicije: "čovjek gradi (*builds up*) čistu matematiku iz osnove intuicije uma [20, str. 53]. Brouwer intuiciju spominje isključivo u kontekstu čiste matematike, matematike u užem smislu.

Intuicija proizlazi iz dvojstva, odnosno pojave vremenskoga niza dvaju osjeta, "temeljnoga događaja uma" [26, str. 418] koji je svijest izveo iz najdubljega doma. No, za razliku od usložnjavanja dvojstva tvorbom vremenskih nizova proizvoljne duljine ili tvorbe uzročnih nizova osjeta, subjekt matematičkom intuicijom dvojstvo tretira na drukčiji način, nad njih provodi stanovitu vrstu apstrakcije, koju Brouwer u [26, str. 419] i [28, str. 46] naziva "matematičkom apstrakcijom". Tu apstrakciju Brouwer karakterizira na različite načine; primjerice, u [20, str. 17] govori o lišavanju dvojstva "svake percepcije promjene" [20, str. 17], u [17, str. 127] o "apstrahiranju od emocionalnoga sadržaja", u [28, str. 46] o "lišavanju (*to strip*) materijalnoga sadržaja", u [15, str. 477] samo o "apstrakciji dvojstva", no najčešće o "lišidbi (*divest*) dvojstva svih kvaliteta" [11, str. 482], [16, str. 510], [21, str. 523]. Primijetimo kako je opis iz [17] manje općenit od ostalih. Ipak, nema naznaka da je Brouwer mislio na nešto drukčije nego u svojim ostalim djelima. Sve navedene karakterizacije tretirat ćemo kao istoznačne, budući da sve polučuju isti rezultat. Pritom ćemo preferirati posljednju formulaciju. Napomenimo kako je u svojim ranijim djelima, primjerice u [20] i [17], Brouwer imao nešto šire poimanje matematičke intuicije; o tome će biti govora uskoro.

Spomenutom lišidbom dobivamo "zajednički supstrat svih dvojstava" [28, str. 46], [26, str. 420], [21, str. 523], "prazan oblik zajedničkoga supstrata svih dvojstava" [11, str. 482], [16, str. 510], "prazno dvojstvo" [21, str. 523], "intuiciju gologa dvo-jedinstva" [17, str 127], "intuiciju dvoga u jednome (*two-in-one*)" [19, str. 119], "izvornu intuiciju dvojedinstva (*Ur-Intuition der Zweieinigkeit*)" [12, str. 102], "jednostavnu intuiciju vremena" [20, str. 53], "intuiciju vremena" [20, str. 71], [23, str. 108], [19, str. 119]), "izvornu (*primordial*) intuiciju matematike" [28, str. 46], [26, str. 420]) ili jednostavno – "osnovnu intuiciju matematike" [20, str. 17], [23, str. 108], [17, str. 127], [15, str. 477], [11, str. 482], [16, str. 510].

Izgleda kako Brouwer intuiciju poima kao objekt, a ne proces. Prazno dvojstvo *jest* intuicija, a ne *rezultat* intuicije. Prema našem mišljenju, intuicija nije posebna sposobnost ljudskoga uma, kao što su to vremenska i uzročna pozornost, a kao što tvrdi Placek u [71, str. 22]. Doduše, prazno dvojstvo kao osnovna intuicija matematike rezultat je procesa matematičke apstrakcije, koju, kako smo gore tvrdili, možemo ili ne moramo pojmiti kao posebnu sposobnost ljudskoga uma. Kako ćemo uskoro vidjeti, matematika (u užem smislu) razvija se iz te osnovne intuicije, ali ne "intuiranjem", već "samoodmatanjem".

Brouwer dakle tvrdi da je zajednički supstrat svih dvojstava osnovna intuicija matematike. Sada se možemo zapitati: Zašto je taj supstrat izjednačen s intuicijom vremena? Primjetimo najprije kako Brouwer govori o lišavanju svih kvaliteta, a ne o lišavanju svih *kvantiteta*. Također, prisjetimo se kako van Dalen matematičku apstrakciju naziva "posljednjom apstrakcijom koja poštuje različitost " [39, str. 9]. Različitost koju ta vrsta apstrakcije poštuje, ono od čega subjekt *ne apstrahira* razlika je u kolikoći. Dakle, razmotrimo li bilo koji vremenski niz dvaju osjeta ili složevina osjetā i provedemo nad njime matematičku apstrakciju, ono što preostaje jest činjenica da se radi(lo) o *dvama* osjetima ili složevinama osjetā.

Potpunom apstrakcijom dobivamo dvojstvo koje se ni po čemo više ne razlikuje, jer nema kvaliteta po kojima bi se razlikovalo, ali ipak se i dalje radi o dvojstvu, koje po svojoj definiciji ima prvi i drugi član. Ako i dalje možemo razlučiti prvi i drugi član, razlika koja ostaje razlika je *u vremenu*. (Osim toga, kada bi subjekt apstrahirao od *svake* razlike između dvaju elemenata, oni bi, prema Leibnizovu načelu istovjetnosti nerazlučivih objekata, bili jedan te isti element.) Kako smo vidjeli ranije, u [11] Brouwer navodi kako dvojstvo nastaje kada jedan *sadašnji* osjet ustupi mjesto *drugome sadašnjemu* osjetu, ne spominjući razliku u njihovoj kakvoći. Oslanjajući se na van Attenovu tvrdnju kako su "osjeti individuirani u vremenu" [1, str. 71], odnosno kako se osjeti razlikuju po trenutcima iz kojih potječu, možemo kazati kako su osjeti "indeksirani" trenutcima.

Nadalje, lišibdu dvojstva svakoga sadržaja možemo shvatiti i kao lišidbu dvojstva svih *osjetā*. Ako vremenskomu nizu dvaju osjeta oduzmemo osjete, ostaje nam prazan vremenski niz, možemo kazati, niz dvaju *trenutaka*. Primjerice, Placek prazno dvojstvo naziva "čistim oblikom susljednosti (*succession*)" [71, str. 27], dok Posy upotrebljava termine "gola" ili "prazna" susljednost [72, str. 134]. Van Stigt navodi kako "maksimalna apstrakcija Brouwerove genetičke analize rezultira percepcijom *prije-poslije*" [81, str. 302]. Isto tako, ako uzmemo u obzir formulaciju matematičke apstrakcije iz [26] kao lišidbu materijalnoga sadržaja, to znači da nam preostaje formalni sadržaj. A forma dvojstva, ono što dvojstvo čini dvojstvom, upravo je *vremenska sveza* između njegovih elemenata.

Jedan mogući prigovor Brouweru jest da intuiciju vremena definira cirkularno. Kao predmet matematičke apstrakcije uzima dvojstvo koje ima bitnu vremensku dimenziju, a samu apstrakciju definira kao oduzimanje svih kvaliteta osim vremenskih. Drugim riječima, praznu sukcesiju ili susljednost subjekt dobiva samo zato što je apstrahirao od dvojstva, što ne bi bio slučaj kada bi apstrahirao od *jedinstva* ili jednoga osjeta. Mogući je odgovor da subjekt prema Brouwerovoj teoriji izlaska svijesti i ne može imati jedan osjet od kojega bi apstrahirao. Um nastaje kada i dvojstvo, koje je ujedno njegov prvi sadržaj, a matematička apstrakcija, kao i cijela intuicionistička matematika, aktivnost je uma. Jedan osjet subjekt ima u najdubljem domu, no tada nema um kojim bi nad njime vršio bilo kakvu operaciju.

Nadalje, lišiti dvojstvo svih osjetā znači lišiti ga svega iskustvenoga. Kod Brouwera dakle, kao i u Kanta, imamo vrijeme kao apriornu formu [11, str. 482], [16, str. 510]. Kako smo ranije tvrdili, za Brouwera je vrijeme apriorna forma svakoga iskustva, uz iznimku religioznoga iskustva. Poput Kanta, i Brouwer smatra da su matematičke istine sintetičke a priori: "Jedini sintetički sudovi (*judgements*) a priori općenito, su [...] oni koji su dobiveni kao mogućnosti matematičkih konstrukcija na temelju (*by virtue of*) osnove intuicije vremena" [20, str. 70]. Ipak, postoje značajne razlike između njihovih filozofija matematike. Već kao glavni cilj svoje disertacije Brouwer navodi ispravljanje i osuvremenjivanje Kantova pogleda na apriornost u iskustvu [20, str. 68]. Nadalje, u [17, str. 125] Brouwer kazuje kako je Kant zastupa "stari oblik intuicionizma", od kojega se Brouwerov intuicionizam razlikuje napuštanjem uvjerenja o apriornosti prostora, ali zadržavajući i još čvršće braneći apriornost vremena.

U [17] Brouwer navodi dva problema s kojima se Kantova teorija suočava razvojem matematike u devetnaestome stoljeću. Prvi, po Brouwerovu mišljenju manje ozbiljan, jest činjenica da se cjelovite matematičke teorije mogu prenijeti iz jedne domene matematike u drugu, primjerice, teoremi aritmetike realnih brojeva ostaju teoremima i kada se primijene na kompleksne brojeve. Ozbiljnija poteškoća za Kanta, tvrdi Brouwer, predstavljaju neeuklidske geometrije. No, Brouwer ne navodi tek puku pojavu neeuklidskih geometrija kao izazov Kantovu poimanju prostora kao apriorne forme vanjskoga iskustva. "Najjači udarac kantovskoj teoriji" [17, str. 127] jest činjenica da se *iste* pojave mogu opisati kako u euklidskoj, tako i u neeuklidskim geomerijama. Istina, opis unutar potonjih često je manje, da tako kažemo, intuitivan, no ništa manje egzaktan. Stoga, tvrdi Brouwer, ne treba tražiti jednu jedinu geometriju koja bi bila istinita za prostor iskustva.

Razmotrimo sada kako i na temelju čega subjekt vrši matematičke konstrukcije pomoću praznoga dvojstva ili osnovne intuicije matematike. Prazno dvojstvo, kao i "neprazno", ima mogućnost samoodmatanja ili opetovanja. "[S]amoodmatanjem osnovnoga događaja uma stvara se vremenski niz fenomenā proizvoljne mnogostrukosti" [28, str. 45], [26, str. 420]. S druge strane, matematika nastaje nastaje "neograničenim samodmatanjem" [16, str. 510] osnovne intuicije, koje nije "ograničeno (*bound by*) vanjskim svijetom, i time konačnošću i odgovornošću" [11, str. 484]. Dakle, vremenski nizovi osjeta, pa time i uzročni nizovi koji iz njih nastaju, premda mogu dostići "raznovrsnu mnoštvenost " [11, str. 480], nikada nisu beskonačni.

> [I]ntuicija [gologa] dvo-jedinstva, osnovna intuicija matematike, stvara ne samo brojeve jedan i dva, već također i sve konačne ordinalne brojeve, utoliko što jedan od elemenata dvo-jedinstva možemo zamisliti kao novo dvo-jedinstvo, kakav proces možemo beskonačno ponavljati [...]. [17, str. 85-86]

Apstrahiranjem dvojstva izvodi se konstrukcija prirodnih brojeva. Broj dva konstruira se na način da dva osjeta lišimo svih kvaliteta [5, str. 86]. Posy [72, str. 134] nam daje primjer konstrukcije broja tri:

> [S]ubjekt može uzeti sam čin stvaranja prazne sukcesije (gologa dvojstva) kao svijestan trenutak različit od nekoga drugoga svjesnoga trenutka, apstrahirati sadržaj od potonjega trenutka i time stvoriti novi mentalni niz – koji odgovara broju tri.

Čini se kako broj dva, kao i dvojstvo, ima istaknut status. Dvojstvo je je istaknuto time što ono je najkraći vremenski niz osjeta. Uzmemo li neko n-torstvo osjetā ponovno kao član dvojstva, možemo dobiti m-torstvo osjetā, gdje je $m = n + 1; n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Kada govorimo o vremenskim nizovima osjetā, ne izgleda nam problematičnim što najkraći niz može imati dva, a ne jedan ili nula elementa. No, uzevši da, općenito, apstrakcijom bilo kojega k-članoga vremenskoga niza ili k-torstva osjetā dobivamo prirodan broj k, izgleda da je najmanji broj koji možemo dobiti intuicijom vremena – broj dva. Tim više, čini se da broj dva *jest* osnovna intuicija matematike. Stoga izgleda kako taj broj možemo shvatiti dvojako, kao prirodan broj, ali kao i golu, praznu ili čistu susljednost, relaciju prije-poslije. Prisjetimo se van Stigtove tvrdnje da je prvi objekt svijesti upravo broj dva. S tome se tvrdnjom, kako smo pokazali, ne slažemo. No, slažemo se njegovom blažom tezom kako je broj dva "genetički prvi broj" [81, str. 307].

Budući da je susljednost unutar svakoga broja očuvana, prirodne brojeve možemo shvatiti kao uređene parove [81, str. 305]. Time bismo, čini se, ujedinili dva načina poimanja broja dva. Taj je broj *jedan* uređen par, jedna cjelina, jedan matematički objekt, ali u njemu je sadržana relacija između njegovih elemenata. No, ni tada broj dva ne gubi poseban status, kao ni dvosmislenost. Naime, prazno je dvojstvo najjednostavniji uređen par, ali i struktura u koju umećemo druge uređene parove, kako bismo dobili brojeve veće od dva.

Unatoč Brouwerovoj tvrdnji iz [17], da intuicija gologa dvo-jedinstva stvara broj jedan, nije popuno jasno kako se odvija ta konstrukcija. Posebice ako brojeve shvatimo kao uređene parove, kako to čini van Stigt u [81], i sâm upozoravajući na upitan konstruktivistički status broja jedan, ali i broja dva. Broj jedan ne možmo dobiti apstrahiranjem od vremenskoga "jedinstva" ili jednočlanoga vremenskoga niza osjetā. Takvo što se ne pojavljuje u Brouwerovoj teoriji izlaska svijesti. Tim više, jednočlan niz nije vremenski niz, niz od jednoga osjeta možemo pronaći tek prije nastanka vremena, u najdubljem domu, a i tada je taj niz "nestalan", jer u najdubljem domu svijest oscilira između mirnoće i osjeta.

Kuiper [67, str. 44], međutim, nudi jednostavan odgovor – prvi je element praznoga dvojstva broj jedan, a drugi broj dva. Mi takvo rješenje ipak ne smatramo plauzibilnim, jer tada bi broj dva bio i sam uređen par, ali i element toga uređenoga para; element samoga sebe. Kuiper dodaje kako Brouwer, za razliku od modernih matematičara, počinje brojati od jedan, a ne od nula. Prema našoj interpretaciji, posljedično, Brouwer počinje brojati od dva. Slično Kuiperu, van Stigt [81, str. 308] navodi kako broj jedan dobivamo matematičkom apstrakijom onoga "prije" u osnovnoj intuiciji matematike, a broj dva matematičkom apstrakcijom onoga "poslije". No, osim što bi i tada osnovna intuicija matematike bila sama svoj član, ona ne bi bila *osnovna* jer bi se mogla rastaviti na elemente. Tim više, Brouwer ne navodi kako se matematičke konstrukcije izvode apstrahiranjem, već *samoodmatanjem* osnovne intuicije matematike. No, ako i odlučimo provesti matematičku apstrakciju nad nečim što već jest rezultat takve apstrakcije, nije jasno kako bi "vrijednost" apstrakcije mogla biti različita od njezina "argumenta", uzevši u obzir da je matematička apstrakcija lišidba svega osjetilnoga.

Jedan je od glavnih izazova intuicionističkoj matematici konstrukcija realnih brojeva, odnosno kontinuuma. U početku svoje matematičke karijere Brouwer je smatrao kako je kontinuum dan u inuticiji istovremeno s intuicijom praznoga dvojstva. Njegovo prvobitno poimanje osnovne intuicije matematike bilo je mnogo bogatije, ostavljajući mjesta za različite interpretacije. Zbog toga smatramo da formulacije matematičke intuicije iz Brouwerovih ranijih spisa treba uzeti sa stanovitom rezervom. Kao primjer navodimo citat iz Brouwerove disertacije, temeljem kojega Schlimm u [76] predstavlja bitne značajke Brouwerove intuicije:

> [O]snovna intuicija matematike (i svake intelektualne aktivnosti) [jest] supstrat, lišen (*divested*) svake kvalitete, svake percepcije promjene, jedinstvo kontinuiranosti i diskretnosti, mogućnost sumišljenja (*thinking together*) nekoliko entiteta, povezanih jednim "između", koje se ne može iscprpsti umetanjem novih entiteta. Budući da se kontinuiranost i diskretnost pojavljuju kao neodvojivi komplementi, obje imajući jednaka prava i bivajući jednako jasnima, nije moguće izbjeći jednu od njih kao primitivan entitet, pokušavajući konstruirati jednu iz druge [...]. [20, str. 17]

Početkom dvadesetih godina dvadesetoga stoljeća Brouwer je pronašao matematički način konstrukcije realnih brojeva, stoga je napustio ideju o neposrednoj danosti kontinuuma u intuiciji [71, str. 28], [35, str. 214]. Realni brojevi konstruiraju se pomoću praznoga dvojstva, i to pomoću konvergentnih beskonačnih nizova racionalnih brojeva [11]. Takvi nizovi nisu unaprijed zadani pravilom, već njihovi elementi ovise o "mogućim budućim matematičkim iskustvima stvarajućega subjekta" [21, str. 528], a nazivaju se "izbornim nizovima" (*choice sequences*). Izborni nizovi nastaju "u potpunoj *slobodi* ili podliježu ograničenjima koja mogu varirati tijekom napretka niza" [15, str. 477, kurziv dodan]. Vidimo ovime kako Brouwer unutar čiste matematike ostavlja prostor za slobodu, koja je u njegovoj široj filozofskoj teoriji epitet volje. Van Atten navodi kako se upravo u izbornim nizovima očituje uloga *volje* u Brouwerovoj matematici [5, str. 252]. On i van Dalen poimlju izborne nizove kao one koji ovise o volji pojedinačnoga matematičara [5, str. 87], [35, str. 213]. Također, Posy [74, str. 330] matematičku aktivnost naziva "voljnom i kreativnom". O volji u domeni čiste, ili matematike u užem smislu, Brouwer, koliko nam je poznato, eksplicitno govori samo u [26], gdje navodi kako je matematička apstrakcija, kao i matematički pogled i provođenje volje znakovima, "podložna slobodnoj volji kako u svojem dosegu (*range*), tako i u načinu (*modality*)". Nažalost, Brouwer ne pojašnjava što točno misli pod dosegom i načinom. U svakome slučaju, pojam *slobode* neizostavan je dio intuicionističke matematike, sadržan u "drugome aktu intuicionizma" [16, 24] koji je Brouwer formulirao pretkraj karijere. Prvi smo akt spomenuli u Uvodu. On je primaran jer pruža uvid u pravu prirodu matematike kao utemeljene na praznome dvojstvu. No, taj uvid, upozorava Brouwer, može na neke ostaviti dojam kako je intuicionistička matematika "skromna i bezizražajna" [16, str. 511] i kako, najvažnije, u njoj nema mjesta za kontinuum. Drugi akt intuicionizma iznosi načela tvorbe nizova dotad izvršenih konstrukcija (primjerice, brojeva) koje su u nizanju "više ili manje slobodno" izabrane [16, str. 511], [24, str. 8]. Naime, stvarajući subjekt može (voljno!) ograničiti svoju buduću slobodu izbora.

Napomenimo, kako to čini i van Atten [3, str. 73], da je inticionisička matematika slobodna, ali ne i *proizvoljna* tvorevina ljudskoga uma. Prema intuicionističkome poimanju, istiniti su samo oni matematički iskazi koji predstavljaju konstrukcije pomoću praznoga dvojsta. S druge strane, u "predintuicionistā" u svijesti postoje iskazi za koje se intuicionističkom intervencijom pokazuje kako nisu u domeni istina čiste intuicionističke matematike time što, poslužimo se ovdje van Stigtovim terminom, krše *genetički poredak*; njihov nastanak ne možemo (re)konstruirati.

Možemo kazati kako "Brouwer program" uključuje jednu vrstu *epistemičkoga revizionizma*, kao što to u načelu čini i Hilbertov program. Konstrukcije koje nisu nastale iz praznoga dvojstva ili su iz njega nastale nekonstruktivističkim načelima za intuicinista nemaju značenje [17]. Hilbert pak značenje (i smisao) pridaje samo onim iskazima koji imaju konačan prikaz u prikladnome formalnome sustavu [89, str. 28]. No, oba matemaičara predlažu metodu tvorbe i opravdanja matematičkih iskaza pomoću strogo utvrđenih pravila njihova nastanka (geneze). Bitna je razlika, naravno, što su za Hilberta ta pravila sintaktička, dok su za Brouwera prisutna u umu stvarajućega subjekta i nejezična. S druge strane, prema tumačenju koje u [91] iznosi Trobok, prisup koji zauzima Frege drukčije je prirode. Fregea ne zanimaju "genetički": psihološki, fiziološki i fizički uvjeti koji moraju biti zadovoljeni kako bismo ustvrdili neku matematičku istinu [91, str. 90–92]. Fizički uvjeti, smatramo, predmet su Hilbertova interesa, koji teži mehanizaciji postupka manipulacije (fizičim) simbolima. Psihološki, a možda i fiziološki, uvjeti opisani su teorijom izlaska svijesti.

Time smo završili opis Brouwerove intuicionističke matematike u okviru šire teorije izlaska svijesti. Razmotrimo sada, opremljeni "pojmovnim instrumentarijem izašle svijesti", genetički primarnije pojmove jastvenosti i otuđenosti.

2.11 Van Dalen o jastvenosti

Svojstva jastvenosti i otuđenosti analizirali smo u okviru prve faze izlaska svijesti. Tada smo govorili o elementima objekta od kojih se subjekt odmiče u ovoj ili onoj mjeri nepovratnosti, pa time te elemente čini više ili manje jastvenima ili otuđenima. No, u prvoj fazi izlaska svijesti o elementima objekta govorili smo samo kao o osjetima ili složevinama osjetā. Opisom preostalih faza izlaska svijesti, sada o elementima objekta možemo govoriti detaljnije. Među osjetima i složevinama osjetā nalaze se uzročni nizovi, stvari, objekti općenito, drugi činitelji, voljni činovi, jezični izrazi, ali i matematički objekti. Čini se da sve navedene vrste osjetā ili njihovih složevina mogu biti dovedene u odnos s mislećim subjektom svojstvima jastvenosti i otuđenosti. Premda sâm Brouwer ne govori o jastvenosti i otuđenosti prema obziru na svaki novi element objekta konstituiran svakom novom fazom izlaska svijesti, detaljniju analizu jastvenosti i otuđenosti različitih vrsta sadržaja subjektova uma pronalazimo u van Dalena u [35] i [36]. O ovome ćemo potpoglavlju tematizirati van Dalenovo poimanje jastvenosti i otuđenosti.

Van Dalen u svojoj analizi ne govori o otuđenosti, već samo o jastvenosti i "ne-jastvenosti". To ne smatramo problematičnim, budući da smo ustanovili kako mjeru otuđenosti (ili ne-jastvenosti) nekoga elementa objekta možemo lako izračunati pomoću mjere jastvenosti toga elementa, rabeći formulu $y = 1 - x$, gdje y označava mjeru otuđenosti, x mjeru jastvenosti, a njihove se vrijednosti nalaze unutar intervala $[0, 1]$. Ipak, smatramo kako je adekvatnije koristiti se obama terminima, jer govor o jastvenosti i ne-jastvenosti može sugerirati da ne postoji "međuprostor" koji zauzimaju djelomično jastveni osjeti. Također, eliminacija otuđenosti iz diskursa sugerira kako je jastvenost primitivan pojam, što je istina uzevši u obzir tumačenje prema [26], ali ne i ono prema [11], kako smo argumentirali u potpoglavlju 2.4.

Nadalje, van Dalen o jastvenosti i otuđenosti govori kao o svojstvu uzročnih nizova. Izgleda kako time ne ostavlja prostor tumačenju prema kojem neki elementarni osjet može biti (u nekoj mjeri) jastven ili otuđen. To nam se čini spornim. Naime, svijet osjetā subjekta svakim se novim trenutkom obogaćuje nadolaskom novoga elementarnoga osjeta; trenutci u vremenu razlikuju se upravo po osjetima koji se u njima pojavljuju. Prema našem mišljenju, sasvim je legitimno upitati se je li (i u kojoj mjeri) novi elementarni osjet otuđen. Takvo pitanje postavili smo u našoj ranijoj analizi, kada smo istražili načine na koje bismo mogli mjeriti jastvenost elementarnoga osjeta u svakome novome trenutku; jedno prema kojem jastvenost elementanoga osjeta u svakome trenutku zauzima ili vrijednost 0 ili vrijednost 1, kao i tumačenje prema kojem jastvenost može zauzimati međuvrijednosti.

Tim više, ako su jastvenost i otuđenost svojstva uzročnih nizova, to znači da o tim važnim svojstvima ne možemo govoriti u prvoj fazi izlaska svijesti. No, kako smo vidjeli, Brouwer u [11] jastvenost i otuđenost spominje i prije pojave uzročne pozornosti, dok u [26] navodi kako je dvojstvo koje nastaje vremenskom pozornošću više-manje odvojeno od subjekta, odnosno kako dvojstvo ima ovaj ili onaj stupanj jastvenosti.

Van Dalen [35, str. 213] nam kazuje kako je "visoko jastven" onaj uzročni niz koji je "pod snažnim utjecajem volje subjekta". Takva interpretacija čini nam se na prvi pogled intuitivnom, no ona ipak postaje nešto manje jasnom kada u obzir uzmemo da se u njoj rabi pojam "volje", vrlo bremenit u Brouwerovu filozofijskome sustavu. Nije posve jasno kako u van Dalenovoj definiciji jastvenosti shvatiti sintagmu "utjecaj volje", niti kako se taj utjecaj može pojačavati, smanjivati ili posve poništiti. Kao prvo, Brouwer u [11, str. 480] navodi kao je uzroňa pozornost "fenomen slobodne volje". Stoga je *svaki* uzročni niz proizvod ili rezultat utjecaja volje subjekta. Tim više, čini se da je svaki uzročni niz pod *snažnim* ujecajem volje subjekta. Brouwer nam u [26, str. 419] kazuje kako svatko može "po volji odsanjati [...] odvajanje od Sebstva i Svijeta percepcije" i time dokinuti postojanje bilo kakvih uzročnih nizova.

U [36, str. 4] van Dalen definirajući jastvenost ne spominje volju, kazujući kako su uzročni nizovi s niskim stupnjem jastvenosti "oni nizovi koji samo rubno (ili nimalo) ovise o subjeku" ili oni na koje subjekt nema velik utjecaj. Tu definiciju van Dalen iznosi u kontekstu subjektova uzročnoga djelovanja. Subjekt (ponovno svojom voljom!) djeluje ili utječe na uzročne nizove kako bi oni rezultirali željenim ishodom. No, i ondje se javlja otklon od izvornoga Brouwerova poimanja; van Dalen u [36], ali i u [35] navodi kako na *stvari u svojem vanjskome svijetu* subjekt ipak može utjecati u nekoj mjeri. To se ponovno čini intuitivnim, ali za posljedicu ima da stvari nisu *potpuno* otuđene, kao što je to slučaj u Brouwera.

Premda nalazimo određena neslaganja između Brouwerove filozofije i van Dalenove interpretacije jastvenosti, ta interpretacija donosi i stanovite prednosti. Kao prvo, van Dalen, osim u skladu s gore ponuđenim definicijama, jastvenost poima i kao "subjektivnost". Slično smo predložili u našem izvornome opisu jastvenosti u potpoglavlju 2.4, kada smo uveli i istražili pojam "sebstvenosti". Van Dalen subjektivnost razumije u svakodnevnome smislu, navodeći kako jastvene objekte možemo pronaći u "subjektivnim područjima života" [35, str. 213], navodeći kao primjer umjetnost i religiju. Mišljenja smo kako je čitanje jastvenosti kao subjektivnosti zahvalan pristup za bolje i šire razumijevanje Brouwerove filozofije. Ipak, smatramo kako se postoji bitna značenjska razlika između Brouwerove "jastvenosti" i "subjektivnosti" u svakodnevnome značenju, koja se očituje u Brouwerovoj definiciji duše (nekoga drugoga!) ljudskoga bića, koju naziva "cjelinom *jastvenih* osjeta" [11, str. 480, kurziv dodan]. Duša drugoga je jastvena, no ne bismo bili skloni kazati da je i subjektivna.

Dodatna je odlika van Dalenova tumačenja u [35, 36] primjena pojma jastvenosti unutar područja matematike i jezika, što otvara mjesto za novu i možebitno plodonosnu interpretaciju i još čvršće povezivanje Brouwerove pozadinske filozofije i njegove filozofije matematike. Van Dalen osim o u ovoj ili onoj mjeri jastvenim uzročnim nizovima govori i o u ovoj ili onoj mjeri jastvenim *matematičkim* nizovima ili nizovima brojeva. Matematiku ovdje možemo shvatiti i u užem i u širem smislu. Prema van Dalenu, Brouwerova matematika posebna je po tome što sadrži jastvene objekte. Radi se o izbornim nizovima. Izborni su nizovi s najvišim stupnjem jastvenosti bezzakoniti (*lawless*) nizovi. Ti nizovi mogu potpuno su ovisni o slobodnome izboru subjekta, u smislu da se ne mogu unaprijed definirati ikakvim pravilom, koje bi ograničilo slobodu subjektova izbora. Kao primjer niza brojeva s niskim stupnjem jastvenosti van Dalen navodi skup prirodnih brojeva.

Mi se nećemo prikloniti van Dalenovu tumačenju; smatramo kako je nedostatak tekstualne potvrde u širokome korpusu Brouwerovih radova dovoljan razlog kako bismo ustvrdili da se (relacijska) svojstva jastvenosti i otuđenosti ne primjenjuju unutar matematike. Posebnost bezzakonitih nizova, nastavlja van Dalen, njihov je "otpor jezičnomu tretmanu" [36, str. 5]. Budući da ne postoji pravilo kojime bi se mogli definirati, ne postoji način da neki činitelj bezankoni niz jezično prenese nekomu drugomu činitelju. Van Dalen to dovodi u usku svezu s Brouwerovih poimanjem jezika kao manjkavoga instumenta. Možemo kazati kako postoje u velikoj mjeri jastveni elementi objekta, koji se upravo zbog te jastvenosti ne mogu izraziti ili "iskomunicirati". U [36] van Dalen povezuje opisljivost (*describability*) i stupanj jastvenosti. Visoko otuđeni matematički nizovi lakše se mogu predstaviti jezikom.

Mogli bismo proširiti van Daleovo tumačene jastvenosti *vis-à-vis* jezika, razmatrajući jastvene elemente objekta općenito. Visoku jastvenost nekoga osjeta ili složevine osjetā možemo shvatiti kao malenu mogućnost da se taj osjet ili složevina jezikom prenesu nekome čnitelju. Takva je interpretacija u skladu s Brouwerovim poimanjem komunikacije, jer njome potpuno jastveni osjeti, među kojima su duše subjekta i ostalih činitelja, ne mogu biti opisani jezikom. Ti osjeti previše su suptilno nijansirani. Nadalje, stvari se u vanjskome svijetu subjekta, kao potpuno otuđeni osjeti, lako daju predstaviti u komunikaciji. Štoviše, pod utjecajem volje drugih činitelja i jezika kao medija za prijenos te volje, vanjski svijet subjekta postaje objektivan svijet prostora i vremena.

2.12 Logika u izlasku svijesti

U ovome ćemo poglavlju pokušati odgovoriti na sljedeća pitanja: U kojoj se fazi izlaska svijesti pojavljuje logika? Koji je značaj logike za izlazak svijesti? Ima li mjesta za "logiku izlaska svijesti"?; i ako ima, o kakvoj se logici radi? Nakraju, koji je Brouwerov stav prema logici? Nastojat ćemo najprije pokazati kako odgovori na ta pitanja ovise o domeni koju razmatramo; govorimo li o osjetilnim ili pak praznim n-torstvima. Tvrdit ćemo da je Brouwerova reforma logike usmjerema na primjenu logike unutar područja *čiste matematike*.

Pronađimo prije svega mjesto logici u izlasku svijesti. Brouwer je logiku smatrao tek posebnim slučajem jezika [3, str. 13]. To vidimo, primjerice u navodu iz [16, str. 509–510], koji smo citirali u Uvodu. Ondje Brouwer kazuje kako matematiku treba odvojiti od matematičkoga jezika, posebice od jezika "teoretske logike". No, Brouwer o logici ne govori samo u okviru intuicionizma, već i općenito; govori također o primjeni logike unutar drugih područja osim matematike. Tvrdit ćemo, između ostaloga, kako je prema Brouweru u drugim područjima opravdano upotrebljavati princip isključenja trećega, odbacivanje kojega se danas najčešće povezuje s intuicionizmom. O logici općenito u polazišnome djelu naše analize Brouwer kazuje sljedeće:

> [P]ostoji sustav općih pravila nazvan *logika*, koji subjektu omogućava da deducira iz sustava složevina riječî koje prenose (*convay*) istine, druge složevine riječî koje također općenito prenose istine. Uzročno ponašanje subjekta (kako izoliralo tako i kooperativno) pod utjecajem je (*is affected by*) logike. Na odgovarajuć način ponašaju se i pojedinci objekta. To ne znači da dodatne složevine riječî u pitanju prenose istine *prije* nego što su bile opažene, niti da te istine *uvijek* mogu biti opažene. Drugim riječima, logika nije pouzdan alat za otkrivanje istina i ne može deducirati istine koje ne bi također bile dostupne i na drugi način. [11, str. 488]

U gornjem navodu Brouwer po prvi puta u [11] spominje logiku. Zanimljivo je kazati da se na gornji navod neposredno nadovezuje "matematički dio" rada, koji u [11] počinje oko polovice stranice 488 i proteže se do kraja rada, stranice 494. "Filozofičniji dio" [11], koji iznosi nekih osam i pol stranica, a u kojem se nalazi najzrelije objašnjenje izlaska svijesti, Putnam i Benacerraf u [8] odlučili su izostaviti. Njihova inačica započinje ovim navodom:

> [S]tajalište da ne postoje nedoživljene (*non-experienced*) istine i da logika nije potpuno pouzdan (*absolutely reliable*) alat za otkrivanje istina, na prihvaćanje je naišao po pitanju (*with regard to*) matematike mnogo kasnije nego po pitanju praktičnoga života i znanosti. [11, str. 488]

Ovdje Brouwer iznosi dvije važne tvrdnje koje su nerazdruživo povezane s prethodnim dijelom članka. Tvrdnja da ne postoje nedoživljene istine, koliko god bila u skladu s Brouwerovim poimanjem matematike, glavnom temom drugoga dijela [11], već je iznesena ranije, u Brouwerovoj teoriji izlaska svijesti. Isto tako, Brouwer implicira da postoje domene upotrebe logike i izvan matematike, konkretno: znanost i praktičan život.

Prema našem shvaćanju, Brouwer početkom matematičkoga dijela [11] pozornost posvećuje logici *unutar matematike*. Tek tada iznosi kritiku nekih klasičih principa zaključivanja, poput načela isključenja trećega ili neograničene eliminacije dvostrukoga nijeka, koju naziva "načelom reciprociteta komplementarnosti" [11, str. 490]. No, postoji i, takoreći, "logika uzročnoga ponašanja", kojom se subjekt koristi u ophođenju sa "svojim vanjskim svijetom", ali i u suradnji s drugima, u "objektivnome svijetu prostora i vremena" [26, str. 421].

Budući da logika kao vrsta jezika omogućava subjektu manipulaciju složevinama riječî, ona se u svijesti javlja *nakon* pojave jezika, tj. u društvenoj fazi izlaska svijesti. Međutim, vidimo kako se subjekt logikom služi "kako izoliralo tako i kooperativno" [11, str. 488], pa se čini kako se logika u svijesti može pojaviti ranije, u drugoj ili izoliranoj uzročnoj fazi izlaska svijesti. S tim se tumačenjem nećemo složiti. Naime, nakon izlaska svijesti i početkom "društvenoga života" subjekt i dalje zadržava "trenutke samoće" u kojima sâm opaža i djeluje na uzročne nizove; Brouwer navodi: "[p]ovratak (*regression*) s treće na drugu fazu čini se čestim i laganim" [11, str. 483].

Nadalje, nakon pojave jezika u trećoj fazi, izlazeća svijest tim se "izumom" počinje služiti i u druge svrhe:

> Iako je jezik izvorno i prvenstveno funkcija djelovanja društvenoga čovjeka, on ima neko značenje u procesima refleksije i mnemotehnike u samoći pojedinačnoga čovjeka, dijelom zbog automatizma navike koji prati upotrebu jezika, dijelom zbog uloge koju znanost i društvena organizacija nastaljaju igrati čak i u misaonome svijetu samoće. [26, str. 423]

Zašto Brouwer navodi kako je logika nepouzdana? To je zbog njezina odnosa prema istini. Makar služi kako bismo iz istina izveli istine, ona ne ispunjava uvijek svoju zadaću; subjekt izvodi složevine riječî koje *općenito* prenose istine. Nadalje, uvjet istinitosti složevina riječî, koje možemo skraćeno nazivati "iskazima", upravo je prisustvo u umu složevinā osjetā koje iskaz izražava. To vidimo iz Brouwerove definicije istine, koja u [11] prethodi njegovu razmatranju o logici. Prva rečenica sljedećega navoda je često citirana u literaturi; mi iznosimo dulji navod, u kojem Brouwer navodi na što se sve istinitost primjenjuje, o čemu sve mogu biti istine. Jasno je kako pretpostavlja pojmove iz teorije izlaska svijesti.

> *[I]stina* je samo u *stvarnosti* (*reality*), tj. u sadašnjim i prošlim iskustvima svijesti. Među time su stvari, njihova svojstva, emocije, pravila (pravila države, pravila suradnje, pravila igre) i djela (*deeds*) (materijalna djela, djela misli, matematička djela). Ali očekivana iskustva, i iskustva pripisana drugima istinita su samo kao očekivanja i hipoteze; u njihovu sadržaju nema istine. [11, str. 488]

Iz gornjega navoda vidimo kako je Brouwerov konstruktivizam samo posljedica njegova općega "verifikacionizma". Taj se verifikacionizam primjenjuje i na matematiku:

> Tek nakon što je intuicionizam prepoznao da je matematika neovisna unutrašnja konstrukcijska mentalna aktivnost [...] kriterij istine ili neistine matematičke tvrdnje (*assertion*) ograničen je na samu matematičku aktivnost, bez pozivanja kako na logiku tako na hipotetičko sveznajuće biće. [13, str. 551–552]

Osim što iznosi ispravna, intuicionistička načela konstrukcije, Brouwer objašnjava i podrijetlo pogrešnoga vjerovanja da je matematika zasnovana na *klasičnoj* logici. Kao jedan od razloga navodi "praktičnu valjanost cjeline klasične logike za opširne skupine *jednostavnih svakodnevnih fenomena*" [11, str. 492, kurziv u originalu]. Nešto detaljniju formulaciju "praktične valjanosti klasične logike" pronalazimo u njegovim kasnijim predavanjima na Cambridgeu:

> [U] proučavanju opsežnih skupina jednostavnih svakodnevnih fenomena vanjskoga svijeta, pažnjiva upotreba cjeline klasične logike dosad nije dovela do pogreške. To *de facto* znači da se uobičajeni objekti i mehanizmi nad kojima se izvode poznate manipulacije ponašaju kao da sustav stanja koja mogu zauzeti tvori dio konačnoga diskretnoga skupa, čiji su članovi povezani konačnim brojem relacija. [24, str. 7]

Iz Brouwerova objašnjenja pogrešne "intuicije" opće primjenljivosti klasične logike, išitavamo i njenu primjenjivost na određene domene. Izgleda kako Brouwer tvrdi da se radi o *konačnim* domenama. A upravo je takva domena "svakodnevnoga" svijeta osjetā. Govoreći o "jednostavnim svakodnevnim fenomenima", Brouwer zasigurno podrazumijeva složevine osjetā koje tvori svijest tijekom svojega razvoja ili "izlaska". Među njima su vremenski nizovi, uzročni nizovi, stvari, želje, zazori, jezik i slično.

Kako smo ustvrdili opisom prve faze izlaska svijesti, svijet osjetā postepeno raste. No, taj svijet ni u kojem trenutku nema beskonačno mnogo članova. Svijesti je dan konačan broj osjeta i konačan broj "pozornosti" kojima od osjetā tvori složevine. Stoga je i svijet koji svijest konstituira konačan.

Povežimo to s jednim "skrivenim" mjestom u [11], gdje Brouwer govori o *ljepoti*. Brouwerovu estetiku ovdje nećemo tematizirati, no on navodi kako ljepotu ne nalazimo u uzročnome mišljenju ili djelovanju. [11, str. 483]. Ipak, kako smo vidjeli ranije, subjektovo uzročno ponašanje pod utjecajem je logike. Stoga slijedi kako postoji neka "logika nelijepoga" ili pak neka logika s "nelijepim" principima zaključivanja, dočim:

> [N]ajpotpunija konstrukcijska ljepota je *introspektivna ljepota matematike*, gdje [...] je osnovna intuicija matematike prepušena slobodnomu odmatanju. To odmatanje nije ograničeno (*bound to*) vanjskim svijetom, i time konačnošću i odgovornošću [...]. [11, str. 484]

Slijedi kako vanjski svijet donosi konačnost i odgovornost. Tada je i logika koja opisuje jednostavne svakodnevne fenomene ograničena na sličan način. Nadalje, kako smo tvrdili, subjekt je za uzročnu pozornost sposoban i bez matematike. Matematika nastaje tek kako bi subjekt u suradnji s ostalim činiteljima lakše i efikasnije utjecao na vanjski svijet. Drugim riječima, postoji "uzročno ponašanje" subjekta i neovisno od pojave (čiste) matematike. A upravo je takvo ponašanje pod utjecajem (klasične) logike. Zaključujemo, unekoliko protivno uvriježenomu mišljenju, kako u široj intuicionističkoj teoriji ne vrijedi općenito kako je logika ovisna o matematici. To je slučaj samo s onom logikom koja opisuje konstrukcije pomoću (samo)odmatanja osnovne intuicije matematike, tj. praznoga dvojstva; intuicionističkom logikom.

Iz činjenice da se klasična logika u svijesti javlja neovisno od intuicionističke matematike ne smijemo zaključiti kako se ona u svijesti javlja i *prije* matematike. Naime, logika je tek jedna vrsta "jezične uzročne pozornosti", koju svijest stječe tek u posljednjoj fazi izlaska. Matematika, tvrdili smo u potpoglavlju 2.9, javlja se u drugoj fazi, a temeljem sadržaja isključivo prve faze izlaska svijesti. Možemo kazati kako upotrebom klasične logike svijest "zaobilazi" matematiku. Također, iz navedenoga slijedi kako je Brouwer barem u nekome smislu bio *logički pluralist*. Naime, nije zagovarao potpunu reviziju logike, već samo njezino ograničenje u slučaju primjene na matematičke iskaze.

U drugome dijelu rada stoga iznosimo dvije "logike izlaska svijesti". Legitimitet formalnoga prikaza izlaska svijesti pronalazimo u Brouwerovim navodima iznesenima u ovome potpoglavlju. Iznosimo "logiku uzročnoga ponašanja", koja opisuje drugu fazu izlaska svijesti, a koju nazivamo "proširena logika izlaska svijesti", ali i logiku "vremenskoga ponašanja", odnosno logiku koja opisuje prvu fazu izlaska svijesti. U tim logikama, slijedeći Brouwerove teze, upotrebljavamo klasičnu logiku.

Izdvojimo ovdje i navod iz [13], jednoga od Brouwerovih posljednjih radova, a kojim prikazujemo Brouwerov kasni stav prema klasičnoj logici, ali ujedno i opravdavamo upotrebu logike za dublji uvid u neko "nematematičko" područje. Ujedno i osporavamo prethodnu tezu, prema kojoj bi logika koja opisuje nešto izuzev matematike bila "logika nelijepoga".

> Nasreću, klasična algebra logike ima doprinosā (*merits*) i odvojeno od pitanja primjenljivosti na matematiku. Ne samo da je kao formalna slika tehnike zdravorazumskoga razmišljanja dosegla visok stupanj savršenosti, već je također u sebi samoj, kao zgrada mislî (*edifice of thought*), iznimne ljepote i sklada. Tim više, njezina nasljednica, raskošna (*sumptuous*) simbolička logika dvadesetoga stoljeća [...] danas neprestano postavlja nove privlačne (*captivating*) probleme i donosi iznenađujuća i probojna otkrića [...]. [13, str. 554]

Nema razloga, smatramo, da područje primjene klasične logike ne bude sâm izlazak svijesti. Za razliku od intuicionističke logike, koja slijedi načela konstrukcije pomoću osnovne intuicije matematike, ovdje donosimo dvije logike koje opisuju neka načela konstitucije svijeta u svijesti.

Bi li pak sâm Brouwer bio sklon formalnomu prikazu ovoga dijela svoje filozofije? Nije lako dati jednoznačan odgovor. Jedino što možemo jest, smatramo, razmotriti Brouwerovu reakciju na Heytingov [52] formalni prikaz intuicionističkoga zaključivanja, možemo ovdje kazati temeljem dosadašnje analize, formalni prikaz "strogo intuicionističkoga" dijela teorije izlaska svijesti. Kako vidimo u [40, str. 373], Brouwer o Heytingovu formalnome sustavu kazuje kako je na "izvanredan način rasvijetlio točke koje [je] i sâm htio objasniti". To nas navodi na tumačenje prema kojem je Heyting na neki način "preduhitrio" Brouwera. Slično tvrdi i van Atten [3, str. 23], navodeći kako je temeljem Heytingova prikaza Brouwer odustao od izrade vlastitoga formalizma. Međutim, Brouwer je neke "točke" zaista i objasio, i to bez izostanka logičkoga formalizma. Kako Brouwer nije govorio samo o principu isključenja srednjega, vidjet ćemo u potpoglavlju 3.4.1, gdje između ostaloga govorimo o intuicionističkoj (iskaznoj) logici. Sada, u skladu s Brouwerovim "logičkopluralističkim tendencijama" i njegovu kasnu pozitivnu prema klasičnoj logici, prelazimo na formalni prikaz izlaska svijesti.

3 FORMALNI PRIKAZ IZLASKA SVIJESTI

3.1 Logika promjene LCG

3.1.1 Motivacija za LCG

Kao polazišnu točku za formalni prikaz Brouwerove teorije izlaska svijesti, uzimamo jednu logiku promjene: LCG. U ovome ćemo potpoglavlju ponuditi filozofijsku motivaciju za nastanak LCG, ali i za njezin izbor pri opisivanju Brouwerove teorije. Logiku promjene LCG iznosi K. Świętorzecka, po prvi put u [85], a najdetaljnije u [86], s ciljem formalnoga opisivanja Aristotelove teorije supstancijalne promjene. Kako je poznato, Aristotel je tu teoriju formirao kako bi odgovorio na Parmenidovu dilemu; samo su dva načina na koji nešto može nastati: ili iz onoga što već jest ili iz onoga što nije. Prema Parmenidu, nijedna od dviju opcija nije moguća. Aristotel razrješava dilemu predlažući promjenu temeljniju od svih ostalih, supstancijanu promjenu, čije su sastavnice nastanak i propadanje. Nastanak jedne supstancije uvijek je propadanje druge; jedna supstancija propada kako bi ustupila mjesto drugoj [86, str. 9]. Świętorzecka razmatra promjene samo između *pojedinačnih ili primarnih* supstancija, koje poima kao aktualno opstojeće esencije, uz naznaku da u Aristotelovu sustavu možemo govoriti i o sekundarnim supstancijama [86, str. 8].

Prikažimo sada zornije sukcesivan nastanak (i nestanak) supstancija, prema dijagramima na [86, str. 10, 11]:

Prikaz 1. *Neka α_n označava neku pojedinačnu supstanciju i neka znak $\Rightarrow$ oznaăva supstancijalnu promjenu. Taj znak možemo čitati kao "... nastajanje iz ...". Sukcesivan nastanak pojedinačnih supstancija možemo prikazati na sljedeći način:*
$\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_2 \Longrightarrow \alpha_3 \Longrightarrow \alpha_4 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \alpha_n \Longrightarrow \ldots$

Prema gornjem prikazu, iz supstancije α_1 nastaje supstancija α_2, iz koje pak nastaje supstancija α_3 itd. No, Aristotelovu supstancijsku ontologiju možemo "dereificirati" [86, str. 17], dobivši time "situacijske parnjake" [86, str. 10] supstancija, govoreći tada o situacijama u kojima neka supstancija postoji ili ne postoji. Budući da se radi o primarnim supstancijama, njihovom dereifikacijom dobivamo "elementarne činjenice" [86, str. 18]. Preuzevši situacijsku ontologiju, možemo nadopuniti gornji prikaz:

Prikaz 2. *Neka α_n označava jednostavnu sitauciju u kojoj postoji neka jednostavna supstancija, a $\neg\alpha_n$ (složenu) situaciju u kojoj ne postoji neka jednostavna supstancija. Neka $\pm\alpha_n$ označava α_n ili $\neg\alpha_n$. Izraze oblika $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_n$, za $n \geq 2$ poimamo kao složene situacije u kojima (ne)postoje supstancije predstavljene s $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ u izrazu. Znak $\Rightarrow$ poimamo sada isključivo kao nastajanje. Sukcesivan nastanak situacija možemo prikazati* *na sljedeći način:*

$\alpha_1 \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n \Longrightarrow \ldots$

Iz situacije u kojoj postoji supstacija α_1 nastaje nova situacija, ona u kojoj α_1 više ne postoji, ali stoji nova situacija α_2, koja predstavlja opstojnost druge supstancije. Nadolaskom nove situacije α_3, prestaje vrijediti α_2 te još uvijek ne vrijedi α_1 itd.

Primijetimo kako oba prikaza možemo čitati rabeći situacijsku ontologiju, dok pomoću supstancijske ontologije, smatramo, smisao možemo dati samo prvomu prikazu. Naime, više nam se legitimnim čini govoriti o negativnim činjenicama, situacijama i stanjima stvari nego li o negativnim supstancijama. Nadalje, situacije koje nastaju iz α_1 jesu *složene situacije* ili "složevine" [86, str. 11] situacija, budući da tvore konjunkcije, možemo kazati lance. Świętorzecka, čini se, i negativne činjenice smatra na neki način elementarnima; afirmacija i negacija prema obziru na nastajanje dva su stanja ili situacije u kojima se može nalaziti neka primarna supstancija. Nešto je drukčijega stava Grzegorczyk, koji u [48, str. 596] zamjećuje kako negativne situacije nisu elementarne, već složene; njih dobivamo zaključivanjem. Kao primjer Grzegorczyk navodi da *vidimo* kako je limun žut, a onda *zaključujemo* kako nije plav.

Vezano uz drugi prikaz, primijetimo također kako se nakon svakoga nastajanja događaju *dvije vrste* promjena. Kao ilustraciju uzmimo fragment $\alpha_1 \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2$ te razmotrimo razlike ili promjene između lijeve i desne strane znaka nastajanja $\Longrightarrow$. Prva je vrsta promjene negiranje situacije α_1. Elementarna situacija koja koja je vrijedila, nakon relacije nastanka više ne vrijedi. Općenitije, možemo kazati da je elementarna situacija α_1 promijenila istinitosnu vrijednost. Druga je vrsta promjene pojava ili *nastanak* nove elementarne situacije, α_2. Važno je uočiti da je potonja vrsta promjene različita od prethodne, odnosno da se ne može svesti na prethodnu. Nije ispravno kazati kako je, poput situacije α_1, i α_2 promijenila istinitosnu vrijednost: taj put iz negacije u afirmaciju. Kada bi i druga promjena bila promjena istinitosne vrijednosti, tada bi fragment koji razmatramo bio $\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Uzevši u obzir ne samo fragment, već i čitav drugi prikaz, složene bismo situacije sa svake strane znaka $\Longrightarrow$ trebali nadopuniti informacijama o ostalim elementarnijim situacijama, što prikazujemo na sljedeći način:

Prikaz 3.

$\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4 \wedge \ldots \neg\alpha_n \ldots \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4 \wedge \ldots \neg\alpha_n \ldots \Longrightarrow \ldots$

Prema novome prikazu, fragment koji razmatramo zapravo se sastoji od prebrojivo mnogo elementarnih situacija sa svake strane znaka nastajanja. Radi lakšega čitanja, dodajmo znaku $\Longrightarrow$ *vremensko tumačenje*; poimajmo ga kao vremenski slijed (između *trenutaka*). Svodeći dodatak situacije α_2 na promjenu istinitosne vrijednosti te elementarne situacije i nadopunivši ga u skladu s trećim prikazom, možemo kazati kako u prvome trenutku imamo složenu situaciju $\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4 \wedge \ldots \neg\alpha_n \ldots$, a u drugome trenutku složenu situaciju $\neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \neg\alpha_4 \wedge \ldots \neg\alpha_n \ldots$. Obje situacije jednako su složene, tj. lanac konjunkcija i u prvome i u drugome slučaju jednake je duljine. Ono po čemu je svaki novi trenutak n specifičan jest upravo istinitost elementarne situacije α_n, dok su sve ostale elementarne situacije neistinite.

Bitna razlika između drugoga i trećega prikaza upravo je duljina konjunkcija u svakome novome trenutku (ovo vrijedi i za prvi trenutak, gdje je konjunkcija duljine 1); svakim novim trenutkom složena se situacija usložnjava za jednu elementarnu činjenicu, koja nije član nijedne prethodne konjunkcije. Drugim riječima, u drugome prikazu pronalazimo svojevrsni "ontološki dinamizam". Kazujemo kako je nova sitacija, izražena konjunktom α_n *nastala* u trenutku n, stoga ne možemo kazati da je nova elementarna činjenica *promijenila* svoju vrijednost s obzirom na neko prijašnje stanje, budući da ni u kojem prijašnjem stanju nije mogla ni biti predmetom razmatranja.

Drugi prikaz Świętorzecka [86, str. 11] naziva "poviješću" lanca supstancijalnih promjena ili "poviješću razvoja" [83, str. 4] toga lanca. Uzevši pak općenito, povijest supstancijalne promjene samo je jedna vrsta povijesti (ona u kojoj nadolaskom nove elementarne situacije sve prethodne elementarne situacije dobivaju negativan predznak). Logika promjene LCG jest sustav koji opisuje sve moguće povijesti, kojima je zajednička samo činjenica da se svakim novim trenutkom lanac konjunkata produljuje za jednu elementarnu situaciju ili njezin nijek.

Sve moguće inačice slijedećih i usložnjavajućih situacija možemo prikazati na sljedeći način [86, str. 11]:

Prikaz 4. *Sve moguće inačice slijedećih i usložnjavajućih situacija možemo prikazati na sljedeći način:*

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 & \\
 & & \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 & \\
 & \alpha_1 \wedge \alpha_2 & \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 & \\
\alpha_1 & \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 & \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 & \ldots \\
\neg\alpha_1 & \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 & \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 & \\
 & \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 & \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 & \\
 & & \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 & \\
 & & \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 &
\end{array}
$$

U gornjem prikazu, svaka povijest iz svakoga stupca odabire točno jednu vrijednost; primjerice povijest aristotelovske supstancijalne promjene odabire pretposljednji redak u svakome stupcu.

Temeljnu strukturu i jezik LCG detaljnije ćemo predstaviti u sljedećem potpoglavlju; razmotrimo sada kratko razvoj povijestî iz brouwerovske perspektive. U teoriji izlaska svijesti pronalazimo promjenu formalno sličnu Aristotelovoj supstancijalnoj promjeni. No, za razliku od supstancija, Brouwer govori o *osjetima*: “[p]rotokom vremena sadašnji osjet ustupa mjesto drugomu sadašnjem osjetu, na način da svijest zadržava prijašnji osjet kao prošli” [11, str. 480]. Usložnjavanje sukcesivnih stanja prisutno je i u izlasku svijesti; najprije nastaje osjetilno vremensko dvojstvo, potom osjetilno vremensko trojstvo, a može nastati “vremenski niz fenomenā proizvoljne mnogostrukosti” [28, str. 45], [26, str. 418], “svijet osjeta raznovrsne mnoštvenosti” [11, str. 480] ili, drugim riječima, bilo koje n-torstvo. To je, tvrdit ćemo, moguće opisati (modificiranim) jezikom logike promjene LCG, jer svako je n-torstvo sadržano i u četvrtome prikazu.

3.1.2 Jezik logike promjene LCG

Opis jezika i strukture LCG iznosimo prema [86], ali i [83], gdje je ta logika promjene iznesena neovisno od Aristotelove filozofije. Posebnost je te logike, što je naša primarna motivacija za njezin izbor pri oslikavanju razvoja svijesti, dinamičan, rastući jezik. Taj se dinamizam očituje u pojmu *razine* jezika i iskaza, a potom u izgradnji modela LCG. Prenosimo sada definiciju rječnika te logike promjene, a potom i ostalih važih sintaktičkih pojmova (usp. [86, 83]).

Definicija 1 (Rječnik LCG)**.**

1. *iskazna slova:* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$
2. *logički poveznici:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. *ostali djelatelji:* C, N, G^+, G^-
4. *zagrade:* $(,)$.

Djelatelj C čitamo kao “mijenja se da ...” (*it changes that...*) (vidi, primjerice, [83, str. 4]). No, preciznije čitanje, kako ćemo uskoro vidjeti iz uvjeta istinitosti iskazā s ovim djelateljem, bilo bi “promijenit će se kako je s ...” ili pak “promijenit će se istinitosna vrijednost iskaza ...”. Djelatelj N čitamo kao “sljedeće je da ...” (*next is that...*). Djelatelji G^+ i G^- nemaju posebno čitanje. Njih se u LCG uvodi definicijama, odnosno dvopogodbama, pa će o njima najviše biti riječi na kraju potpoglavlja 3.1.4, kada ih uvedemo i sintaktički (definicija 19 dolje). Shvatimo te djelatelje zasad kao još jednu vrstu promjene, promjenu u "razini" iskaza (definicija 5 dolje). G^+ i G^- promjene zajedno se nazivaju "G-promjenama".

Definicija 2 (Skup atomarnih iskaza)**.** *Skup* $ES = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\}$ *skup je atomarnih iskaza.*

Skup ES može, ali i ne mora biti beskonačan. Njegove elemente, u skladu sa situacijskom ontologijom opisanom u prošlome potpoglavlju, poimamo kao *elementarne situacije.*

Definicija 3 (Razina jezika)**.** *Jezik razine* n *skup je svih iskaza tvorenih pomoću nekoga skupa* $ES_n \subset ES$, *takvoga da* $ES_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Definicija 4 (Iskaz LCG)**.**

$$p ::= \alpha_n \mid \neg p \mid p \wedge p \mid p \vee p \mid p \rightarrow p \mid p \leftrightarrow p \mid Cp \mid Np \mid G^+p \mid G^-p.$$

Osim razine jezika, u LCG razlikujemo i razine iskaza.

Definicija 5 (Minimalna razina iskaza)**.** *Minimalna razina iskaza* p ($lv(p)$) *neki je* $n \in \mathbb{N}_{>0}$, *takav da je* n *najveći pokazatelj nekoga atomarnoga iskaza* α_n *koji je podiskaz* p.

Primjerice, iskaz $\neg\alpha_3 \vee (\alpha_4 \leftrightarrow C\alpha_1)$ minimalne je razine 4. Svaki iskaz razine n također je i razine m, gdje $n \leq m$. Minimalna razina kazuje nam kada se po prvi puta neki iskaz može pojaviti u jeziku (kada razina jezika odgovara razini iskaza), dok nam razina općenito govori u kojim ga trenutcima razvoja "svemira" (definicija 7) možemo razmatrati.

3.1.3 Istinitost u LCG

Istinitost u LCG definirana je pomoću mogućih svjetova različitih razina *složenosti*, koji pak tvore svemire pripadajućih razina složenosti. Složenost svjetova i svemirā vezana je uz razinu jezika i iskaza. Sve definicije semantičkih pojmova u ovome potpoglavlju iznosimo prema [86] i [83].

Definicija 6 (Mogući svijet)**.** *Mogući svijet* (s_n) *stanje je koje predstavljamo nekom konjunkcijom* $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_n$, *gdje* $\pm\alpha_n$ *označava* α_n *ili* $\neg\alpha_n$. *Za mogući svijet* s_n *kažemo da je složenosti* n, *gdje* n *odgovara najvećemu indeksu nekoga atomarnoga podiskaza u konjunkciji.*

Definicija 7 (Svemir)**.** *Svemir (B_n) skup je svih s_n. Za svemir B_n kažemo da je složenosti n.*

Što je n veći, to je veći broj mogućih svjetova složenosti n, a time i elemenata nekoga svemira B_n. Primjerice, prva dva svemira, složenosti 1 i 2 imaju sljedeće elemente:
$B_1 = \{\alpha_1, \neg\alpha_1\}$
$B_2 = \{\alpha_1 \wedge \alpha_2, \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2, \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2, \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2\}$.
Općenito, broj članova nekoga B_n jest 2^n.

Istinitost se u logici promjene LCG definira pomoću funkcije φ, koju možemo shvatiti kao *povijest* razvoja svijeta [86, str. 23].

Definicija 8 (Povijest razvoja svijeta)**.** *Povijest razvoja svijeta $\varphi : \mathbb{N}_{>0} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} B_n$ funkcija je koja svakome $n \in \mathbb{N}_{>0}$ pridružuje točno jedan $s_n \in B_n$.*

Broj mogućih povijesti do stanja n je $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Vrijednosti $\varphi(n)$, prema intuitivnome čitanju kojim smo se dosad koristili, možemo poimati kao moguće svjetove. Dakako, postoje i druga čitanja; dva smo naveli ranije, kada smo neformalno govorili o povijesti supstancijalnih promjena i povijesti razvoja svijesti. Osim "mogućim svjetovima", Świętorzecka članove svemira B_n naziva i "globalnim situacijama" [86, str. 20]. Te se sitacije sastoje od elementarnih ili jednostavnih situacija i njihovih nijekova. U [88, str. 125] i [83, str. 4] predložena su tri načina na koje na koje možemo shvatiti vrijednost funkcije povijesti. $\varphi(n)$ možemo poimati kao tvrdnju o tome:

(i) koji su atomarni iskazi istiniti ili neistiniti na stupnju (*stage*) n razvoja svemira

(ii) koji su atomarni iskazi prihvaćeni ili odbijeni na stupnju n razvoja vjerovanjā nekoga činitelja

(iii) koji su atomarni iskazi smatrani istinitima ili neistinitima u koraku n nekoga dokaza.

Navedimo najprije da Świętorzecka ponekad govori o povijesti razvoja *svijeta*, a ponekad o povijesti razvoja *svemira*; i jedno i drugo se razvija, prema definicijama 6 i 7. Ipak, kako funkcija povijesti kao argumente uzima svjetove, mi ćemo govoriti o razvoju svijeta.

Vidimo kako se ni u jednome predloženome čitanju ne spominju *trenutci*, već stupnjevi ili koraci. Ipak, LCG dopušta i vremensku interpretaciju. U metateoriji, primjerice, $\varphi(3) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$ možemo čitati kao "u trećem trenutku razvoja (povijesti) svijeta istinito je α_1 i α_2, ali ne i α_3". Mi ćemo se i u nastavku opisa LCG prikloniti prvomu od triju predloženih, možemo kazati ontologijskome tumačenju, koje smatrano intuitivnim i neutralnim. Pritom ćemo stupnjeve uzimati jednostavno kao trenutke. Kasnije, u formalnome opisu izlaska svijesti rabit ćemo “fenomenologijsko tumačenje” (potpoglavlje 3.2.1).

Sada vidimo na koji način u LCG jezik “raste”. Mogući svijet u trenutku n složeniji je za jedan atomaran iskaz (ili njegov nijek) od mogućega svijeta u trenutku $n-1$. Drugim riječima, istiniti ili neistiniti iskazi u trenutku n tvoreni su pomoću jezika razine n, a u trenutku $n+1$ razine $n+1$.

Naposljetku, možemo iznijeti induktivnu definiciju istinitosti u LCG. Izraz $\varphi \vDash^n p$ čitamo: “iskaz p istinit je u trenutku n prema obziru na povijest φ.

Definicija 9 (Istinitost u LCG)**.** *Za svaki atomaran iskaz $\alpha_k, 1 \leq k \leq n$:*

1. *$\varphi \vDash^n \alpha_k$ akko se stanje predstavljeno iskazom α_k pojavljuje bez znaka nijeka u konjunkciji $\varphi(n)$ koja označava neki mogući svijet (definicija 6).*

Ako su p i q iskazi minimalnih razina n ili manjih, onda:

2. *$\varphi \vDash^n \neg p$ akko $\varphi \nvDash^n p$*
3. *$\varphi \vDash^n p \wedge q$ akko $\varphi \vDash^n p$ i $\varphi \vDash^n q$*
4. *$\varphi \vDash^n p \vee q$ akko $\varphi \vDash^n p$ ili $\varphi \vDash^n q$*
5. *$\varphi \vDash^n p \rightarrow q$ akko $\varphi \nvDash^n p$ ili $\varphi \vDash^n q$*
6. *$\varphi \vDash^n p \leftrightarrow q$ akko ($\varphi \nvDash^n p$ ili $\varphi \vDash^n q$) i ($\varphi \vDash^n p$ ili $\varphi \nvDash^n q$)*
7. *$\varphi \vDash^n Cp$ akko ($\varphi \vDash^n p$ i $\varphi \nvDash^{n+1} p$) ili ($\varphi \nvDash^n p$ i $\varphi \vDash^{n+1} p$)*
8. *$\varphi \vDash^n Np$ akko $\varphi \vDash^{n+1} p$.*

Ako $lv(p) = k-1$ i $k \leq n$, onda:

9. *$\varphi \vDash^n G^+p$ akko $\varphi \vDash^n p$ i $\varphi \vDash^n \alpha_k$*
10. *$\varphi \vDash^n G^-p$ akko $\varphi \vDash^n p$ i $\varphi \nvDash^n \alpha_k$.*

Ako $n < lv(p)$:

11. *$\varphi \vDash^n p$ je nedefinirano.*

Definirajmo sada pojmove zadovoljivosti i semantičke posljedice u logici promjene LCG.

Definicija 10 (Zadovoljivost skupa iskazā logike LCG)**.** *Skup iskaza* Γ *logike* LCG *zadovoljiv je akko postoji neka funkcija* φ *takva da za neki* $n \geq 1$ *funkcija* φ *u* n *istinitima čini sve članove skupa* Γ*. Taj odnos označavamo ovako:* $\varphi \vDash^n_{\mathrm{LCG}} \Gamma$.

Definicija 11 (Semantička posljedičnost u LCG)**.** *Iskaz* p *je sematička posljedica skupa iskazā* Γ *akko: ako* $\varphi \vDash^n_{\mathrm{LCG}} \Gamma$*, onda* $\varphi \vDash^n_{\mathrm{LCG}} p$*. Taj odnos kraće označavamo ovako:* $\Gamma \vDash_{\mathrm{LCG}} p$.

Od posebne je važnosti posljednji uvjet definicije 9. Upravo je u tome uvjetu rast jezika LCG učinjem smislenim, i to "obesmišljavanjem" svih iskaza čija je minimalna razina veća od broja trenutka ili stupnja u kojem se nalazi neka povijest φ. Prisjetimo se prikaza 3. Taj prikaz ne odgovara nijednoj povijesti u LCG. U njemu je, primjerice, elementarna situacija α_2 promijenila svoju istinitosnu vrijednost između prvoga i drugoga trenutka. O logici promjene koju razmatramo, α_2 zbog svoje minimalne razine u prvome trenutku i nema istinitosnu vrijednost, $\pm\alpha_2$ može biti predmetom tumačenja tek od drugoga trenutka razvoja neke povijesti.

Uzevši u obzir širu Brouwerovu filozofiju, posebno je zanimljivo da u LCG ne vrijedi univerzalno pravilo isključenja trećega; ne možemo u svakome trenutku za bilo koji iskaz tvrditi da je ili istinit ili neistinit. $p \vee \neg p$ istinitosnu vrijednost ima samo u svjetovima $\varphi(n)$ takvima da $lv(p \vee \neg p) \leq \varphi(n)$. Smatramo kako je to u skladu s Brouwerovim stavovima o klasičnoj nasuprot intuicionističkoj logici, koje smo naveli u završnome dijelu prošloga poglavlja. Princip isključenja srednjega ima "praktičnu valjanost" [11, str. 492]; njega možemo primjenjivati u konačnim domenama. I zaista, u svakome je mogućem svijetu broj jednostavnih situacija konačan. Isto vrijedi shvatimo li situacije kao osjete; svijet osjetā subjekta postaje svijetom raznovrsne mnogostrukosti, no ipak strogo manje mnogostrukosti nego "svijet matematike", u kojem se mišljenje proširuje i na besonačne domene, čime "stvarajući subjekt" [14, 11, 16, 21] prema konstruktivističkim naputcima nije opravdan neograničeno se koristiti načelom isključenja srednjega.

Naravno, u LCG prije nekoga trenutka n ne vrijedi nijedna tautologija minimalne razine veće od n, pa je na taj način LCG stroža od intuicionističke logike, ali ponovno, smatramo, u skladu s Brouwerovom filozofijom:

> Uzročno je djelovanje subjekta [...] pod utjecajem logike. [...] To ne znači da [...] složevine riječî prenose istine *prije* negoli su te istine doživljene, niti da te istine *uvijek mogu* biti doživljenima. Drugim riječima, logika nije pouzdan

alat za otkrivanje istina i ne može deducirati istine koje ne bi bile pristupačne i na drugi način. [11, str. 488, kurziv u originalu]

O sustavu LCG detaljnije ćemo govoriti u sljedećem potpoglavlju. Recimo ipak sada samo nekoliko riječi o zaključivanju u ovoj logici promjene. Shvatimo li atomarne iskaze brouwerovski, kao situacije u kojima subjekt doživljava elementarne osjete, u LCG logika subjektu ne dopušta, da se poslužimo Kantovim terminom, hiperfizičku spoznaju. Sve njegovo rezoniranje potječe od konačnoga lanca osjetā. Sada se upitnima čine povijesti u kojima se u nekome novome trenutku uvodi negativan osjet, a koje smo gore naznačili kao "nebrouwerovske". Navedimo jedan primjer. Neka $\varphi(3) = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$. U sustavu LCG moći ćemo iz toga zaključiti $\alpha_2 \vee \alpha_3$, što će ujedno biti istina u $\varphi(3)$. Drugim riječima, subjekt će moći smisleno, štoviše istinito, a pod utjecajem logike, govoriti o α_3, a da taj osjet nikada nije doživio.

Slično, postavlja se pitanje kako intuitivno protumačiti neki iskaz p čija je minimalna razina veća od stupnja razvoja svijeta u kojem taj iskaz razmatramo. Možemo kazati kako je p prije $\varphi(lv(p))$ *besmislen*. No, imajući na umu dinamizam razvoja složenosti svemira B_n, znamo da će naposljetku povijest izabrati neki mogući svijet s_n predstavljen konjunkcijom, takav da $lv(s_n) = lv(p)$; iskaz p neće i *ostati* besmislenim. Vjerujemo kako je ta interpretacija bliska Brouwerovu poimanju jezika. Jezičnom uzročnom pozornošću povezuju se *doživljeni* osjeti i njihovi jezični prikazi. Alternativno, možemo govoriti i o *neodlučljivosti* nekoga iskaza p prije $\varphi(lv(p))$.

U LCG razlikujemo dvije vrste valjanosti: φ-valjanost i valjanost *simpliciter*. Ove definicije preuzimamo iz [86, str. 27]:

Definicija 12 (φ-valjanost)**.** *Za svaki iskaz* $p, lv(p) = n$*:*
p *je* φ*-valjano akko* $\varphi \vDash^k p$ *za svaki* $k, n \leq k$*.*

Definicija 13 (Valjanost)**.** *Za svaki iskaz* p*:*
p *je valjano akko* p *je* φ*-valjano za svaku povijest* φ*.*

Kažimo ukratko nešto o jednoj "podlogici" LCG, logici LC, opisanoj u [88, 33]. LCG i LC dijele isti skup atomarnih iskaza ES. No, u LC ne razlikujemo razine jezika, niti razine iskaza. Stoga nam pokazatelj n u LC o svakome α_n daje, takoreći, manje informacija nego u LCG. Brojke u indeksima atomarnih iskaza u LC služe nam samo kako bismo atomarne iskaze razlikovali. Naime, funkcija φ u LC svakome $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ne pridružuje neku posebnu konjunkciju, već bilo koji nepravi podskup ES. Isto tako, u LC ne vrijedi istinitosni uvjet 11 iz definicije 9. S druge strane, u LCG nam brojka u indeksu svakoga atomarnoga iskaza ne služi samo kako bismo elementarne situacije razlikovali, već iz njih iščitavamo i informaciju od kojega trenutka ili stanja razvoja svijeta (svijesti) neki atomaran iskaz ima istinitsnu vrijednost. Budući da oslikavaju promjene u razini iskaza, u rječniku LC ne nalaze se G^+ i G^-.

3.1.4 Aksiomi i definicije LCG

Postoji nekoliko aksiomatskih shema karakterističnih za logiku promjene LCG. Oblik i broj ovih shema nije u svim prikazima LCG jednak. U [86] iznesene su sljedeće:

1. $Cp \to C\neg p$
2. $C(p \wedge q) \to (Cp \vee Cq)$
3. $(\neg p \wedge q \wedge Cp \wedge \neg Cq) \to C(p \wedge q)$
4. $(\neg p \wedge \neg q \wedge Cp \wedge Cq) \to C(p \wedge q)$
5. $(\neg p \wedge Cp \wedge \neg q) \to C(p \vee q)$
6. $C(p \leftrightarrow q) \to \neg(Cp \leftrightarrow Cq)$

U [83] je potpunost dokazana rabeći samo prve četiri sheme; posljednje dvije, za koje je valjanost dokazana u [86], time su se pokazale poučcima. Nadalje, u [88] kao karakteristične[13] navedene su samo prve tri aksiomatske sheme, gdje se tvrdi kako su ostale poučci. Nakraju, u [84] navedene su sheme 1, 2 i 4, dok umjesto sheme 3 stoji:

3.' $(p \wedge \neg Cp \wedge Cq) \to C(p \to q)$.

Mi ćemo se odlučiti za aksiomatizaciju predstavljenu u [83], budući da se radi o najčešće iznošenoj aksiomatizaciji, korištenoj još i u [33, 87]. U svim aksiomatizacijama LCG imamo jednaka tri pravila zaključivanja.

Definicija 14 (Aksiomatski sustav LCG). *Aksiomatski sustav* LCG *tvore sve klasične iskazne tautologije i svi iskazi sljedećega oblika* [83, str. 4]:

1. $Cp \to C\neg p$

2. $C(p \wedge q) \to (Cp \vee Cq)$

3. $(\neg p \wedge q \wedge Cp \wedge \neg Cq) \to C(p \wedge q)$

[13] U [88] razmatra se sustav LC, što nije relevantno za opis djelatelja promjene C.

4. $(\neg p \wedge \neg q \wedge Cp \wedge Cq) \rightarrow C(p \wedge q)$

Pravila zaključivanja su:

- *modus ponens (MP): ako* $\vdash p$ *i* $\vdash p \rightarrow q$*, onda* $\vdash q$
- *pravilo uvođenja djelatelja C (*$\neg C$*-pravilo): ako* $\vdash p$*, onda* $\vdash \neg Cp$
- *pravilo zamjene (replacement) (Rep): ako* $\vdash p[q]$ *i* $\vdash q \leftrightarrow q'$*, onda* $\vdash p[q']$*, gdje* $p[q]$ *znači da je* q *neki podiskaz od* p*.*

Kako smo vidjeli u definiciji 1, u rječniku LCG osim C postoje još tri djelatelja, za koje smo istinitosne uvjete ponudili u definiciji 9. Ti se djelatelji ne opisuju aksiomima, već se uvode definicijama. Djelatelj N definiran je na sljedeći način:

Definicija 15 (Djelatelj N u sustavu LCG)**.** $Np \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Cp)$.

Podiskaz $p \leftrightarrow \neg Cp$ iz definicije 15 istovrijedan je iskazu $(p \wedge \neg Cp) \vee (\neg p \wedge Cp)$. Iz istinitosnoga uvjeta 7 iz definicije 9 vidimo kako je potonji iskaz istinit na nekome stupnju n ako i samo ako je iskaz p istinit na stupnju $n+1$: ili je u n p istinito i na sljedećem stupnju to se ne mijenja, ili je p u n neistinito, ali to se u $n+1$ mijenja, što pak odgovara uvjetu 8 iz definicije 9.

Za djelatelj N možemo u LCG izvesti pravilo zaključivanja analogno $\neg C$-pravilu [86, str. 35].

Poučak 1. *U* LCG *dozvoljeno je koristiti se pravilom uvođenja djelatelja N (N-pravilo):* $p \vdash Np$*, gdje je* p *neka tautologija.*

Dokaz.

(1)	$\vdash p$	(pretpostavka)
(2)	$\vdash \neg Cp$	(1, $\neg C$-pravilo)
(3)	$\vdash p \wedge \neg Cp$	(1, 2)
(4)	$\vdash (p \wedge \neg Cp) \vee (\neg p \wedge Cp)$	(3)
(5)	$\vdash p \leftrightarrow \neg Cp$	(4)
(6)	$\vdash Np$	(5, Rep, definicija 15)

□

Prema obziru na definirani djelatelj N, u LCG je važan i sljedeći poučak [86, str. 34–35].

Poučak 2. *U* LCG *dokažljivo je:*

1. $\neg Np \leftrightarrow N\neg p$

2. $N(p \to q) \to (Np \to Np)$.

Sada djelatelj N definirljiv u LCG možemo usporediti s djelateljem F, koji je u [75, str. 8] ponudio Prior, čitanja: "bit će ...". Temeljem detaljnije analize pojma budućnosti sadržanoga u F, Prior definira dvomjesni budućnosni djelatelj. Iskaz $F_n p$ čitamo: "za n trenutaka[14] Bit će p. Djelatelj N možemo tada shvatiti kao jedan slučaj $F_n p$, takav da $n = 1$.

Upravo taj slučaj razmatra Clifford u [32], predstavljajući sustav F, kojega je pravilo, uz modus ponens, analogno N-pravilu iz poučka 1, a karakteristične aksiomatske sheme odgovaraju shemama iz poučka 2. Clifford djelatelj F_1 označava jednostavno s F te ga potom uspoređuje s dvomjesnim vremenskim djelateljen T, kojega je u [93] predstavio von Wright. Iskaz pTq čitamo: "(sada je) p i u sljedećem trenutku bit će q." Svoj je sustav von Wright nazvao T. Taj će nam naziv trebati kasnije, stoga ovdje taj sustav nazivamo W.

Definicija 16 (Sustav W)**.** *Aksiomatski sustav logike* W *(von Wright) čine sve tautologije klasične iskazne logike i iskazi oblika* [94, str. 209]:

1. $(p \vee q)T(r \vee s) \leftrightarrow (pTq) \vee (pTs) \vee (qTr) \vee (qTs)$

2. $(pTq) \wedge (rTs) \leftrightarrow (p \wedge r)T(q \wedge s)$

3. $p \leftrightarrow pT(q \vee \neg q)$

4. $\neg(pT(q \wedge \neg q)$.

Pravila zaključivanja jesu modus ponens i pravilo zamjene (Rep).

Von Wright je pokazao potpunost sustava W. Clifford je dokazao deduktivnu ekvivalentnost sustavā F i W, gdje pTq prevodimo kao $p \wedge Fq$, a Fp kao $(q \vee \neg q)Tp$. Świętorzecka i Czermak u [83] Cliffordovu modifikaciju Priorova sustava nazivaju sustavom N, rabeći umjesto F djelatelj N, te pokazujući kako je N deduktivno ekvivalentan LCG. Unutar sustava N djelatelj promjene C može se definirati na sljedeći način [83, str. 6]:

Definicija 17 (Djelatelj C u sustavu N)**.** $Cp \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Np)$.

[14] Prior [75, str. 11] govori o "danima".

Dakle, pojednostavljen Priorov sustav i von Wrightov sustav, koji su među prvim formalizacijama vremenske logike, imaju istu deduktivnu snagu kao logika promjene LCG. Taj je rezultat od filozofijske, a ne samo od logičke važnosti. Pomoću djelatelja promjene C, koji ne mora imati vremensko čitanje, mogu se definirati vremenski djelatelji, a pomoću aksiomatskih shema karakterističnih za C (definicija 14) izvesti aksiomi sustavā jednostavnih vremenskih logika. Isto tako, sustav LCG možemo izvesti uzimajući kao aksiome stavke iz teorema 2 i definiciju 17. To znači da se ne moramo odlučiti hoćemo li primat dati promjeni ili vremenu; hoćemo li promjenu mjeriti vremenom ili vrijeme promjenom. Ovdje je posebno pogodno spomenuti Brouwerovu neodređenost po pitanju ovih pojmova. Kazali smo kako u teoriji izlaska svijesti nije na prvi pogled jasan odnos kvalitativne razlike osjetā i njihova vremenskoga poretka; slijede li osjeti jedan za drugim jer su različiti ili su različiti zato što jedan za drugim slijede? Tim više, Brouwer u [20, str. 61] govori o "vremenu kao promjeni *per se*".

Napomenimo kako djelatelj N govori o *neposrednoj* budućnosti, odnosno o stanju, stupnju ili trenutku $n+1$. S druge strane, možemo govoriti i "neodređenome" budućnosnome djelatelju. Iznesimo ovdje zanimljiv Priorov uvid koji nalazimo u [75, str. 11–12], a koji možemo formalno povezati s prvim stavkom teorema 2. Čitajući F kao "bit će ..." Prior navodi kako se iskaz $\neg Fp \leftrightarrow F\neg p$ ne čini intuitivnim; ako vrijedi $\neg Fp \leftrightarrow F\neg p$, tada vrijedi i $\neg F\neg p \leftrightarrow Fp$, kojega nam se lijeva strana čini snažnijom tvrdnjom od desne. Tvrdnja da neće biti ne-p, odnosno $\neg F\neg p$ po značenju izgleda bliskijom tvrdnji "uvijek će biti p", negoli onoj koja glasi: "bit će p".

Prior to ilustrira predlažući uvođenje novoga, jednomjesnoga i "neodređenoga" djelatelja F u svjetlu dvomjesnoga budućnosnoga djelatelja F_n. Ako F_np čitamo kao "p će se dogoditi za n trenutaka", iskaz Fp možemo čitati: "p će se dogoditi u *nekom* sljedećem trenutku":

Definicija 18 (Neodređeni budućnosni djelatelj F)**.** $Fp \leftrightarrow \exists n F_n p$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $\neg F\neg p \leftrightarrow Fp$. Pomoću definicije 18 dobivamo $\neg\exists n F_n \neg p \leftrightarrow \exists n F_n p$. Pomoću de Morganovih zakona dobivamo $\forall n \neg F_n \neg p \leftrightarrow \exists n F_n p$. Lijevu stranu ekvivalencije mijenjamo i u posljednjem koraku, dobivajući $\forall n F_n \leftrightarrow \exists n F_n p$, gdje je lijeva strana dvopogodbe snažnija od desne. Time Prior pokazuje kako $\neg Fp \leftrightarrow F\neg p$, ako F shvatimo kao neodređen budućnosni djelatelj opisan definicijom 18 ne vrijedi.

Pogledajmo sada može li se isto kazati i za određeni vremenski djelatelj N. Prvi stavak teorema 2, $\neg Np \leftrightarrow N\neg p$, odnosno njegova inačica $\neg N\neg A \leftrightarrow NA$ izgleda mnogo prihvatljivijom. Kazati da u sljedećemu trenutku neće biti ne-p isto je što i kazati da će u sljedećemu trenutku biti p. Nadalje, na djelatelj N ne možemo primijeniti definiciju , budući da N odgovara Priorovu sasvim određenomu djelatelju F_1.

Ostaje nam još definirati vrstu promjene karakteristične za LCG, a koja se ne može izraziti ni u Priorovu, ni u von Wrightovu sustavu. Kako smo vidjeli u definicijama 6 i 7, mogući se svjetovi između stanja n i stanja $n+1$ razlikuju prema složenosti. Prema definiciji 9 $\varphi \models^n Np$ ekvivalentno je $\varphi \models^{n+1} p$, no $\varphi(n)$ se razlikuje od $\varphi(n+1)$; $s_{n+1} = \varphi(n+1)$ prikazujemo nekom konjunkcijom. Dakako, ta je konjunkcija iskaz, kao i konjunkcija koja predstavlja svijet s_n. Sada, $lv(s_n) = n$, dok $lv(s_{n+1}) = +1$.

Alternativno, možemo kazati da su iskazi u svijetu s_n tvoreni pomoću jezika razine n (definicija 3). Povećanje minimalne razine iskazā u LCG možemo u predmetnome jeziku izraziti dvama djelateljima, koji opisuju tzv. "G-promjene" (usp. [83, str. 6]):

Definicija 19 (G-promjene)**.** *Neka je $lv(p) = n - 1$. Tada:*

1. $G^+p \leftrightarrow (p \wedge \alpha_n)$

2. $G^-p \leftrightarrow (p \wedge \neg\alpha_n)$

Primijetimo kako stavci iz definicije 19 odgovaraju istinitosnim uvjetima 9. i 10. iz definicije 9. Vezano sada uz istinitost G^+p i G^-p, primijetimo kako iskaz p ne mora biti istinit u trenutku $n - 1$, važno je samo da se njegova istinitosna vrijednost može razmatrati tek na stupnju n razvoja nekoga svemira. Djelatelji G^+ i G^- omogućuju nam da u predmetnome jeziku izrazimo nadolazak novih, dotada "besmislenih" iskaza. Isto tako, obje G-promjene, tj. i G^+p i G^-p kazuju nam koje je stanje, stupanj, ili trenutak *sadašnji*: onaj za jedan veći od minimalne razine iskaza p.

Dokazi pouzdanosti (*soundness*) i potpunosti LCG izneseni su u [86]. Potpunost je dokazana na dva načina: pomoću konjunktivnih normalnih oblika i dokazom u Henkin-Lindenbaumovu stilu, koristeći se kanonskim modelom.

3.2 Jednostavna logika izlaska svijesti (LEC)

3.2.1 Motivacija za LEC

U ovome potpoglavlju donosimo formalni prikaz dijela Brouwerove teorije svijesti, točnije prve faze izlaska svijesti. Makar se Brouwerova "pozadinska filozofija", kako smo naveli u prethodnome poglavlju, često označava kao mistična i hermetična, mi smatramo kako se ne radi o nekoj ezoteričnoj teoriji. Štoviše, Brouwer je u izražavanju i izboru terminā vrlo temeljit i precizan, a počesto i “matematički” koncizan. Često prisutno zanemarivanje Brouwerove teorije izlaska svijesti jedan je on naših motiva za iznošenje formalnoga prikaza te teorije. Kako ćemo nastojati pokazati, ta tobože hermetična teorija podliježe formalnologičkome opisu jednako kao i “precizniji” dijelovi njegove filozofije koji su kasnije dobili svoj formalni opis, konkretno, intuicionistička logika i teorija stvarajućega subjekta.

Dodatan razlog za formalni prikaz prve faze izlaska svijesti sličnost je strukture logike promjene LCG i Brouwerove teorije nastanka osjetilnoga n-torstva vremenskom pozornošću, bitnom odrednicom prve faze izlaska svijesti. Smatramo kako se dinamizam nastanka vremenskih nizova može opisati rastućim jezikom LCG. Stoga vjerujemo da ta logika promjene, zajedno s formalnim opisom pojmova jastvenosti, otuđenosti, želje i zazora može predstavljati adekvatan prikaz početka izlaska svijesti, koji nazivamo “jednostavnom logikom izlaska svijesti” – LEC[15].

Motiv za iznošenje *jednostavne* logike izlaska svijesti bogatstvo je formalnomu opisu podložnih pojmova koje Brouwer iznosi već u prvoj fazi izlaska svijesti. Ta faza temeljna je i neizostavna u misaonome životu subjekta, a logičkim opisom njezinih glavnih momenata moguće je, smatramo, predstaviti osnovna načela subjektove tvorbe svijeta osjetā, svijeta koji se stalno nadograđuje novim osjetima, što prikazujemo ponajprije dinamičnim jezikom preuzetim iz LCG. Kasnije ćemo ”proširenom logikom izlaska svijesti” u diskurs uvesti i uzročnost, kao odrednicu druge faze izlaska svijesti.

O nekim svojstvima jednostavne logike izlaska svijesti već smo posredno govorili u uvodnome dijelu poglavlja, iznoseći motivaciju za izbor LCG kao ishodišne logike za prikaz izlaska svijesti. Ishodište, je, međutim, potrebno modificirati s obzirom na Brouwerovu filozofiju.

Na stranici 85 naveli smo neka moguća tumačenja vrijednostî koje zauzima neka povijest φ u LCG, iznesenā u [88, str. 125] i [83, str. 4]. Najprije, postoji ontologijsko tumačenje, koje smo uzeli kao polazno, govoreći o *mogućim svjetovima.* No, postoje i epistemičko te dokaznoteorijsko tumačenje. U epistemičkome tumačenju, mogući svjetovi postaju spoznajne situacije, dok je u dokaznoteorijskome mogući svijet redak dokaza.

Podsjetimo se sada prikaza 4 na stranici 82. Iz njega izdvajamo sljedeći fragment:

Prikaz 5.

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3$

[15] Od eng. *Logic of the Exodus of Consciousness.*

Upoznati s jezikom LCG, isti fragment možemo izraziti kazavši: za neku povijest φ^*,

$$\varphi^*(2) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \;\text{ i }\; \varphi^*(3) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3.$$

Povijest φ^* sasvim je legitimna u LCG: predstavlja prelazak iz jedne (epistemičke) situacije u novu: može nastati nova negativna činjenica, ili spoznavajući ili "dokazujući" subjekt može ustvrditi nijek nekoga iskaza i time proširiti svoj "spoznajni horizont".

U logici izlaska svijesti, s druge strane, iskaze ćemo poimati kao *osjete*, tj. ponudit ćemo *fenomenologijsko* tumačenje LCG u kojem je svijest, tj. "svjesnost" bitna značajka svake vrijednosti koju zauzima neka povijest φ. Takvo se tumačenje razlikuje od polazišnoga onologijskoga, ali i dokaznoteorijskoga i epistemičkoga; konkretno, prema njemu povijest φ^* nije legitimna. Naime, smatramo, kako prelazak iz $\varphi^*(2)$ u $\varphi^*(3)$ ne predstavlja za izlazeću svijest *novo* osjetilno stanje – njezin je sadržaj u oba stanja ili trenutka $\alpha_1 \wedge \alpha_2$. Pritom nijek atomarnoga iskaza poimamo kao *lišidbu* jednostavnoga osjeta koji predstavlja atomaran iskaz.

Nadalje, lišidbu osjeta također ćemo poimati kao osjet. Naime, razmotrimo novi isječak prikaza 4:

Prikaz 6.

$\alpha_1 \Rightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Rightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$

Formalnim jezikom, za neku povijest $\varphi^\bullet$:

$$\varphi^\bullet(1) = \alpha_1,\ \varphi^\bullet(2) = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \text{ i } \varphi^\bullet(3) = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3.$$

Svaku vrijednost funkcije φ poimamo kao neko osjetilo stanje, predstavljeno konjunkcijom. Konjunkte razumijemo kao jednostavne osjetilne sastavnice osjetilnoga stanja, predstavljene atomarnim iskazima, ali i njihovim nijekovima. Tako se, primjerice, osjetilno stanje $\varphi^\bullet$ sastoji od dvaju "jednostavnih" osjeta, koje predstavljamo iskazima $\neg\alpha_1$ i α_2. Potonji iskaz označava neki jednostavan osjet. Iskaz α_1 označava neki različit jednostavan osjet, a njegov nijek *osjet lišidbe* toga osjeta.

Primijetimo kako o lišidbi ne govorimo "objektivno" ili u ontologijskome smislu. Svaki element vrijednosti povijesti u nekome trenutku sastoji se od *svjesnih* stanja subjekta. Tako je i lišidba svjesna, "informirana lišidba". Upravo takva je lišidba osjeta α_1 u $\varphi^\bullet(2)$. Naime, to je zato što je postojao neki prošli trenutak (u ovome slučaju prvi trenutak povijesti) u kojem je svijest subjekta osjet α_1 doživjela na *pozitivan* način.

Ovomu nalazimo primjer i u svakodnevnome govoru. Često se za koga kaže da "ne zna što propušta". Time se ne želi kazati kako netko ne zna *da* propušta ono o čemu se govori. Radije, iznosi se složenija tvrdnja. Izrazimo je koristeći se konkretnim primjerom – igranjem tenisa. Zaljubljenik u tenis kazavši za "netenisača" da "ne zna što propušta", tvrdi nešto poput: "Netenisač sada ne igra tenis. No, kada bi postao tenisačem, razdoblja lišidbe igre tenisa, premda ih i sada doživljava, tada bi doživljavao na drukčiji način, ima bi novi osjet – *osjet ne-igranja tenisa*".

Dakle, makar nijek nekoga atomarnoga iskaza poimamo kao *izostanak* osjeta označenoga tim iskazom, taj izostanak poimamo isključivao kao *doživljenu lišidbu*. Smatramo da se, s motrišta spoznavajuće svijesti, lišidba nekoga nikada doživljenoga osjeta ne može nazvati "nečim novim", novim osjetom.

Ovomu ćemo doskočiti modifikacijom strukture polazišne logike promjene; funkcija poput φ^* neće biti jer neće svi svjetovi mogući u LCG biti mogući svjetovi osjetā za izlazeću svijest. Svjetovi mogući u LCG, ali ne i u LEC (prema definiciji 6 na stranici 84), bit će svjetovi predstavljeni konjunkcijama oblika $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_n$.

"Fenomenologizacija" tumačenja LCG donosi još jednu važnu promjenu. U jednostavnoj logici izlaska svijesti svjesnost će također biti bitna odrednica iskazā tvorenih pomoću djelatelja karakterisitčnih za LCG. Uvodimo promjenu u točkama 7 i 8 u definiciji 9. Djelatelji C i N u LCG uzajamno su definirljivi; budući da je C primitivan, govorit ćemo samo o djelatelju promjene, tj. točki 7. Naime, ta točka razmatra, za istinitost iskaza Cp u trenutku n, osim toga trenutka, i trenutak $n+1$. U vremenskoj interpretaciji LCG jest jedna logika budućnosti, baš poput von Wrightove [93] i Priorove [75] logike. Možemo, nešto općenitije i ne nužno koristeći se vremenskom interpretacijom, kazati kako je LCG logika "okrenuta prema naprijed"; prema sljedećem stanju, stupnju. Pod time podrazumijevamo činjenicu da je istinitost njezinih djelatelja definirana prema obziru na ono što će "tek doći", ono što je "ispred". U LEC ćemo atomarne iskaze tumačiti kao jednostavne osjete. Složeni iskazi odgovarat će pak složevinama osjetā. Takvi, nadalje, mogu biti i iskazi tvoreni djelateljem C. No, ono što će tek doći ne može određivati istinitost onoga što je u svijesti (što je osjet) *sada*.

Zato LCG "okrećemo unatrag". U jednostavnoj logici izlaska svijesti, sve što je istinito u nekome "mogućem svijetu osjetā" mora moći biti prisutno u svijesti spoznavajućega subjekta. "istina je samo u [...] prošlim i sadašnjim iskustvima svijesti" [11, str. 488]. Jednostavna logika izlaska svijesti logika je sadašnjosti i prošlosti. Sukladno tomu, točku 7 iz definicije 9 modificiramo na sljedeći način:

7.' $\varphi \vDash^n Cp$ akko ($\varphi \vDash^{n-1} p$ i $\varphi \nvDash^n p$) ili ($\varphi \nvDash^{n-1} p$ i $\varphi \vDash^n p$).

Iznesimo sada neovisno formalni opis jezika LEC.

3.2.2 Jezik logike LEC

Jezik jednostavne logike izlaska svijesti nazivamo $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$.

Definicija 20 (Rječnik $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$)**.**

1. *iskazna slova:* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$
2. *logički poveznici:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. *ostali djelatelji:* C, G^+, G^-, P
4. *jednomjesni priroci:* A, D, E, R
5. *zagrade:* $(,)$.

Iskazi se u jednostavnoj logici izlaska svijesti tvore na sljedeći način:

Definicija 21 (Iskaz $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$)**.**

$$p ::= \alpha_n \mid \neg p \mid p \wedge p \mid p \vee p \mid p \rightarrow p \mid p \leftrightarrow p \mid Cp \mid Pp \mid G^+p \mid G^-p \mid A \pm \alpha_n \mid D \pm \alpha_n \mid$$

$$E \pm \alpha_n \mid R \pm \alpha_n.$$

Iskazna slova tumačimo kao jednostavne ili elementarne osjete, ali to činimo i s nijekovima iskaznih slova, prema gore izloženoj fenomenologijskoj interpretaciji. Nijekovi ili lišidbe osjetilnih stanja osjeti su *al pari* s "jednostavnijim" jednostavnim, osjetima, predstavljenim samo atomarnim iskazima. Kako bismo izbjegli pojmovnu zbrku, koristimo se novim pojmom.

Za "jednostavne osjete" radije ćemo kazati kako su "jednočlani". To su "atomi" koji tvore složevine osjetā. No, jednočlane osjete predstavljaju i nijekovi atomarnih iskaza; naposlijetku, nijek je jednomjestan poveznik.

U LEC skup atomarnih iskaza jednak je kao u LCG (definicija 2 na stranici 84). No, njegove ćemo elemente tumačiti drukčije, stoga iznosimo analognu definiciju:

Definicija 22 (Skup pozitivnih jednočlanih osjeta)**.** *Skup pozitivnih jednočlanih osjeta predstavljamo skupom* $ES = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Definicija 23 (Skup mogućih jednočlanih osjeta)**.** *Skup jednočlanih osjeta predstavljamo skupom* $ES^{\pm} = ES \cup ES^{\neg}$, *gdje* $ES^{\neg} = \{\neg\alpha_n \mid \alpha_n \in ES\}$.

Jednostavna logika izlaska svijesti prošlosna je logika, pa je u jeziku $\mathcal{L}_{\text{LEC}}$ djelatelj N, definiran stavkom 8 definicije 9 zamijenjen djelateljam neposredne prošlosti, P. Naime, kako iskaze tumačimo kao osjete, tj. kao sadržaj svijesti, iskazima s djelateljima P i C pripisujemo značenje koje može biti doživljen sadržaj svijesti. Pp čitamo: "u prošlome je trenutku bilo p" (*previously it was* p). Djelatelj C opisuje promjenu istinitosne vrijednosti nekoga iskaza. Cp čitamo: "promijenila se (*changed*) vrijednost p", ili "promijenilo se kako je bilo s p". Više o razlozima otklona od rječnika LCG kazat ćemo u okviru semantike $\mathcal{L}_{\text{LEC}}$.

Jednomjesni priroci E i R označavaju jastvenost i otuđenost; Ep čitamo: "p je jastveno" (*egoic*). Rp čitamo: "p je otuđeno" (od *to recede*; pridjev koji Brouwer rabi je *estranged*). Nadalje, Dp čitamo: "subjekt želi p (*desire*), dok Ap čitamo: "subjekt zazire od p" (*apprehension*).

Razmotrimo posljednju točku definicije 21. Tim tvorbenim pravilom priklonili smo se jednomu od tumačenja mjera jastvenosti i otuđenosti koje smo razmatrali u potpoglavlju 2.4. Jednostavni osjeti ili su otuđeni ili jastveni; od njih se subjekt ili odmakao *u najvećoj mjeri* [11, str. 480] ili nimalo; oni su ili *potpuno usmjereni na sebstvo* [26, str. 418] ili usmjereni njemu nasuprot. S druge strane, mjere jastvenosti i otuđenosti složevina osjetā (koje predstavljamo složenim iskazima) ovise o (ne-)jastvenosti njihovih atomarnih sastavnica. Isto vrijedi i za mjeru u kojoj subjekt neki osjet ili složevinu osjetā želi ili od nje zazire. Priročima A, D, E i R označavamo svojstva jednostavnih osjeta. Ne radi se o svojstvima *simpliciter*, već o *relacijskim* svojstvima; jastvenost i otuđenost, kako im sami nazivi sugeriraju, mjere se prema obziru na spoznavajućega subjekta.

Brouwer u [11, str. 480] govori o "mjeri" a u [26, str. 420] "stupnju" jastvenosti i otuđenosti. Nadalje, mjera jastvenosti odgovara mjeri gubitka otuđenosti, za što smo ponudili formulu $y = 1 - x$, gdje y izražava mjeru jastvenosti, a x mjeru otuđenosti, a njihove vrijednosti sadržane su unutar otvorenoga intervala $[0, 1]$.

Kažimo ovdje nešto o A, D, E i R *qua* priročima. Dodavanje ovih priroka kao izdvojenih i, takoreći, unaprijed danih, dijelom je inspirirano Gödelovim formalnim dokazom Božje opstojnosti, tj. gödelovskim ontološkim sustavima prikazanima u [63], gdje se svojstvo "pozitivnosti" uvodi kao svojstvo trećega reda i (namjerno) ostavlja nedefiniranim.[16]

Na kraju, ali možda i najvažnije, analogno definicijama 3 i 5 na stranicama 84 i 84, u LEC postoje razine jezika i iskaza. Jezikom razine n tvorimo iskaze razina n ili manje.

[16] Kako će se pokazati, i u logikama izlaska svijesti dovoljno je samo jedno "pozitivno" svojstvo – željenost.

Pokazatelji na atomarnim iskazima u jeziku $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$ ne služe nam samo kako bismo atomarne iskaze razlikovali, već nam daju i dodatnu informaciju, oslikanu u tvorbi mogućih svjetova.

3.2.3 Model i istinitost u LEC

Ovdje uvodimo novu definiciju mogućega svijeta, prikladniju Brouwerovoj teoriji izlaska svijesti. Kako bismo novu definiciju razlikovali od definicije 6 na stranici 84, govorimo o "mogućem svijetu osjetā", no kasnije ćemo spominjući "moguće svjetove" misliti isključivo na svjetove u skladu s definicijom 24.

Definicija 24 (Mogući svijet osjetā). *Mogući svijet osjetā (s_n) osjetilno je stanje koje predstavljamo nekom konjunkcijom $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n$, gdje $\pm\alpha_n$ označava α_n ili $\neg\alpha_n$. Za mogući svijet s_n kažemo da je složenosti n, gdje n odgovara najvećemu indeksu nekoga atomarnoga podiskaza u konjunkciji.*

Budući da ćemo nadalje govoriti o svjetovima osjetā, i o svemirima ćemo govoriti kao o svemirima osjetā, pišući "B_n" podrazumijevat ćemo svemir osjetā složenosti n.

Definicija 25 (Svemir osjetā). *Svemir osjetā (B_n) skup je svih s_n. Za svemir B_n kažemo da je složenosti n.*

Razmotrimo ponovno definiciju 7. Vidimo kako se u svakome svemiru B_n u LCG nalazi 2^n mogućih svjetova. Nadalje, u svakome B_n jedna je polovica mogućih svjetova oblika $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_{n-1} \wedge \neg\alpha_n$, dok ostatak svjetova ima oblik $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n$. To je vidljivo već iz principa tvorbe mogućih svjetova u LCG. B_{n+1} dobivamo tako da na svaki član B_n dodamo kao posljednji konjunkt α_{n+1}, a potom i $\neg\alpha_{n+1}$. Jednostavnije rečeno, svaki B_n u LCG skup je svih konjunkcija $\pm\alpha_n$.

Kažimo nešto o broju mogućih svjetova osjetā u nekome skupu B_n. Koristimo ovdje oznake B_n^{LCG} za svemir na stupnju n u logici promjene LCG, a B_n^{LEC} za svemir na stupnju n, u jednostavnoj logici izlaska svijesti. Vrijedi odnos:

$$|B_n^{\mathrm{LEC}}| = |\frac{B_n^{\mathrm{LCG}}}{2}|.$$

Također, kako $|B_n^{\mathrm{LCG}}| = 2^n$, za neki svemir mogućih svjetova osjetā za neku spoznavajuću svijest stoji:

$$|B_n^{\mathrm{LEC}}| = 2^{n-1}.$$

Osim svemira, definiramo skup mogućih svjetova, ali i nekoliko ostalih pojmova, kojima ćemo se koristiti pri izgradnji modela LEC.

Definicija 26 (Skup mogućih svjetova osjeta)**.** *Skup mogućih svjetova osjetā unija je svih svemira:* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} B_n$.

Definicija 27 (Povijest svijesti)**.** *Funkcija povijesti svijesti* $\varphi : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} B_n$ *funkcija je koja svakomu* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *pridružuje točno jedan* $s_n \in B_n$.

Definicije 25 i 27 analogne su definicijama 7 i 8 na stranici 85.

Na stranici 101 prikazujemo moguće svjetove osjetā u prvih pet trenutaka te neke dvije povijesti izlaska svijesti: $\varphi^\bullet$ (prikazanu istočkanom strelicom) i φ' (prikazanu isprekidanom strelicom). Usporedimo taj prikaz s prikazom 4 na stranici 82. Vidimo kako svaki mogući svijet u $\bigcup B_5$ ima pozitivan posljednji konjunkt.

Nastavimo sada s pojmovima karakterisitčnima za LEC, kojima ćemo se koristiti pri definiranju modela te logike.

Definicija 28 (Načini odmaka i konativnosti)**.** *Neka* e *označava jastvenost ('egoicitiy') i neka* r *označava otuđenost (od 'to recede' ili 'est<u>r</u>anged'). Jastvenost i otuđenost nazivamo "načinima odmaka". Nadalje, neka* a *označava zazornost ('apprehension') i neka* d *označava željenost ('desire'). Zazornost i željenost nazivano "načinima konativnosti". Te načine predstavljamo skupovima:*

$\Lambda = \{e, r\}$

$\Psi = \{a, d\}$.

Definicija 29 (Odmak svijesti)**.** *Funkcija odmaka svijesti* $\lambda : ES^{\pm} \rightarrow \Lambda$ *funkcija je koja svakomu članu* $ES^{\pm}$ *pridružuje točno jedan od članova* Λ*. Za funkciju odmaka vrijede sljedeći uvjeti:*

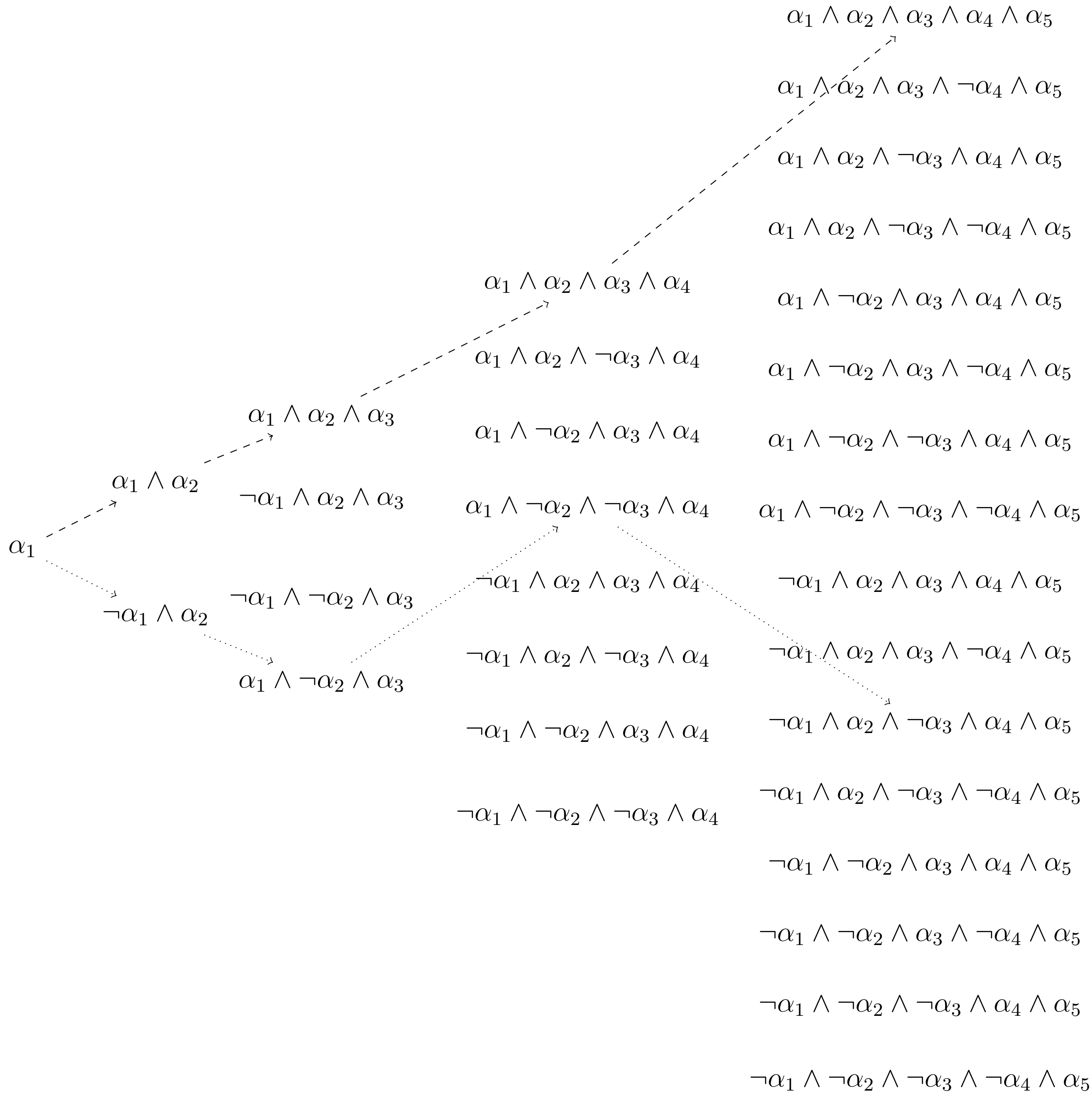
i) $\lambda(\alpha_n) = e$ *akko* $\lambda(\neg\alpha_n) = e$

ii) $\lambda(\alpha_n) = r$ *akko* $\lambda(\neg\alpha_n) = r$.

Prema vrijednostima odmaka definiramo sljedeće skupove:

Definicija 30 (Skupovi jastvenih i otuđenih osjeta)**.**

1. $EA = \{\pm\alpha_n \in ES^{\pm} \mid \lambda(\pm\alpha_n) = e\}$
2. $RA = \{\pm\alpha_n \in ES^{\pm} \mid \lambda(\pm\alpha_n) = r\}$



Slika 1: Mogući svjetovi i povijesti $\varphi^\bullet$ i φ'

3. $RA_n = \{\pm\alpha_k \in RA \mid n \geq k\}$.

Definicija 31 (Konativnost svijesti). *Funkcija konativnosti svijesti* $\psi : (\mathbb{N}_{>0} \times RA) \rightarrow \Psi$ *funkcija je koja svakomu uređenomu paru* $(n, \pm\alpha_k)$ *pridružuje točno jedan od članova* Ψ. *Za funkciju konativnosti vrijede sljedeći uvjeti:*

i) $\psi(n, \alpha_k) = a$ *akko* $\psi(n, \neg\alpha_k) = d$

ii) $\psi(n, \neg\alpha_k) = a$ *akko* $\psi(n, \alpha_k) = d$.

Prema konativnosti parova definiramo sljedeće skupove:

Definicija 32 (Skupovi željenih i zazornih osjeta).

1. $DA_n = \{\pm\alpha_k \in RA_n \mid \psi(n, \pm\alpha_k) = d\}$
2. $AA_n = \{\pm\alpha_k \in RA_n \mid \psi(n, \pm\alpha_k) = a\}$.

Prikažimo ovdje ključne pojmove iz definicija 28–32 tablično:

Odmak	λ	e	Λ	jastvenost	EA
		r		otuđenost	RA
Konativnost	ψ	a	Ψ	zazornost	AA_n
		d		željenost	DA_n

Sada možemo definirati model jednostavne logike izlaska svijesti.

Definicija 33 (Model LEC). *Model jednostavne logike izlaska svijesti uređena je četvorka* $\mathfrak{M} = \langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} B_n, \varphi, \lambda, \psi \rangle$.

Objasnimo sada $\mathfrak{M}$ i neformalno. U svakome trenutku subjekt doživljava točno jedan mogući svijet osjetā, sastavljen od "jednočlanih" osjeta, a predstavljen konjunkcijom atomarnih iskaza i njihovih nijekova (vidi definicije 22 i 23 na stranici 97). Podsjećemo, lišidbama jednostavnih osjeta također pripisujemo jednu vrstu "atomarnosti", stoga su i nijekovi ravnopravne sastavnice svijeta osjetā, uz napomenu da se lišidbe nikada doživljenih osjeta ne mogu pojaviti u svijesti prije samoga "predmeta lišidbe". Također, svakim novim trenutkom mogući se svijet osjetā usložnjava za točno jedan(pozitivan jednočlan) osjet. To osiguravaju prva dva člana modela. Nadalje, od svakoga novoga jednočlanoga osjeta subjekt se odmiče na jedan od dvaju načina, po uzoru na "mjeru nepovratnosti odmaka" koju Brouwer uvodi u [11, str. 480]. Za jednočlane osjeta načini su odmaka ili jastvenost ili otuđenost, predstavljene vrijednostima e, odnosno r. Time se priklanjamo jednomu od tumačenja koje smo izložili u potpoglavlju 2.4, gdje smo tematizirali odmak od pojedinačnih osjeta. Jastvenost i otuđenost ne mijenjaju svoje vrijednosti u povijesti svijesti. To je oslikano domenom funkcije λ, kao i skupovima EA i RA, koji nemaju pokazatelj trenutka. S druge strane, želje i zazori svakim se novim trenutkom u izlasku svijesti mogu mijenjati. To je oslikano dodatnom funkcijom, koja svakome broju većemu od 1 (koji predstavlja svaki novi trenutak) pridružuje jedan od načina konativnosti, prema uzoru na "pozitivnu i negativnu konativnu aktivnost" koju Brouwer spominje u [11, str. 480] u okviru emocija želje i zazora. Načini konativnosti su željenost i zazornost, a također se pripisuju jednočlanim osjetima. Otuđenost, jastvenost, željenost i zazornost složevina osjetā funkcija su otuđenosti, jastvenosti, željenosti i zazornosti njihovih jednočlanih sastavnica.

Definirajmo sada istinitost u modelu jednostavne logike izlaska svijesti:

Definicija 34 (Istinitost u $\mathfrak{M}$)**.**
Za svaki atomaran iskaz $\alpha_k, 1 \leq k \leq n$:

1. *$\varphi \models^n \alpha_k$ akko se osjetilno stanje predstavljeno iskazom α_k pojavljuje bez znaka nijeka u konjunkciji $\varphi(n)$ koja označava neki mogući svijet osjetā (definicija 24).*

Ako su p i q iskazi minimalnih razina manjih ili jednakih n, onda:

2. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n \neg p$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \not\models^n p$
3. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p \wedge q$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p$ *i* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n q$
4. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p \vee q$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p$ *ili* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n q$
5. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p \rightarrow q$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \not\models^n p$ *ili* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n q$
6. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p \leftrightarrow q$ *akko* $(\mathfrak{M}, \varphi \not\models^n p$ *ili* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n q)$ *i* $(\mathfrak{M}, \varphi \models^n p$ *ili* $\mathfrak{M}, \varphi \not\models^n q)$
7. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n Cp$ *akko* $(\mathfrak{M}, \varphi \models^{n-1} p$ *i* $\mathfrak{M}, \varphi \not\models^n p)$ *ili* $(\mathfrak{M}, \varphi \not\models^{n-1} p$ *i* $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p)$
8. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n Pp$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \models^{n-1} p$.

Za neki $\pm\alpha_k$, gdje $k \leq n$:

9. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n E \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in EA$
10. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n R \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in RA$

11. $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n A \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in AA_n$

12. $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n D \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in DA_n$.

Ako je p_1 *iskaz minimalne razine* $k-1$*, gdje* $k \leq n$*, onda:*

13. $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n G^+ p_1$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n p_1$ *i* $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n \alpha_k$

14. $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n G^- p_1$ *akko* $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n p_1$ *i* $\mathfrak{M}, \varphi \nvDash^n \alpha_k$.

Ako $n < lv(p)$:

15. $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n p$ *je nedefinirano.*

Definicija 35 (Zadovoljivost skupa iskazā u $\mathfrak{M}$)**.** *Skup iskaza* Γ *logike* LEC *zadovoljiv je akko postoji neki model* $\mathfrak{M}$ *s funkcijom* φ *takvom da za neki* $n \geq 1$ *funkcija* φ *u* n *istinitima čini sve članove skupa* Γ*. Taj odnos označavamo ovako:* $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n_{\text{LEC}} \Gamma$.

Definicija 36 (Semantička posljedičnost u $\mathfrak{M}$)**.** *Iskaz* p *sematička je posljedica skupa iskazā* Γ *akko: ako* $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n_{\text{LEC}} \Gamma$*, onda* $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n_{\text{LEC}} p$*. Taj odnos kraće označavamo ovako:* $\Gamma \vDash_{\text{LEC}} p$.

Definicija 37 (φ-valjanost u $\mathfrak{M}$)**.** *Za svaki iskaz* $p, lv(p) = n$*:*
p je φ-valjano akko $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^k p$ *za svaki* $k, n \leq k$.

Definicija 38 (Valjanost u $\mathfrak{M}$)**.** *Za svaki iskaz* p*:*
p je valjano akko p je φ-valjano u svakome $\mathfrak{M}$.

3.2.4 Sustav LEC

Sustav LCG uključuje sve tautologije klasične iskazne logike te aksiome i definicije karakteristične za djelatelje C, N, G^+ i G^-. Mi se odlučujemo za drukčiji pristup. Sustav jednostavne logike izlaska svijesti sustav je naravne dedukcije s dodatnim aksiomima i definicijama. Pravila naravne dedukcije prikazujemo prema [29, str. 17], uz dodatak pravila zamjene i $\neg C$- pravila, karakterističnih za LCG i opisanih definicijom 14. Također, u sâm sustav uključujemo definicije neprimitivnih djelatelja.

Definicija 39 (Sustav LEC)**.**
Neka je Γ *neki skup iskaza, a* p *neki iskaz. Dokažljivost* p *iz skupa* Γ *označujemo: "*$\Gamma \vdash p$*". Umjesto "*$\Gamma \cup \Delta \vdash p$*" pišemo "*$\Gamma, \Delta \vdash p$*". Strukturna pravila (u uglatim zagradama) i pravila zaključivanja u sustavu* LEC *su sljedeća:*

[op] *opetovanje:* $\Gamma, p \vdash p$

[mon] *monotonost: ako* $\Gamma \vdash p$, *onda* $\Gamma, \Delta \vdash p$

(u $\wedge$) *uvođenje konjunkcije: ako* $\Gamma \vdash p$ *i* $\Gamma \vdash q$, *onda* $\Gamma \vdash p \wedge q$

(i $\wedge$) *isključenje konjunkcije: ako* $\Gamma \vdash p \wedge q$, *onda* $\Gamma \vdash p$ *i* $\Gamma \vdash q$

(u $\vee$) *uvođenje disjunkcije: ako* $\Gamma \vdash p$ *ili* $\Gamma \vdash q$, *onda* $\Gamma \vdash p \vee q$

(i $\vee$) *isključenje disjunkcije: ako* $\Gamma \vdash p \vee q$ *i* $\Gamma, p \vdash r$ *i* $\Gamma, q \vdash r$, *onda* $\Gamma \vdash r$

(u $\rightarrow$) *uvođenje pogodbe: ako* $\Gamma, p \vdash q$, *onda* $\Gamma \vdash p \rightarrow q$

(i $\rightarrow$) *isključenje pogodbe: ako* $\Gamma \vdash p \rightarrow q$ *i* $\Gamma \vdash p$, *onda* $\Gamma \vdash q$

(u $\leftrightarrow$) *uvođenje dvopogodbe: ako* $\Gamma, p \vdash q$ *i* $\Gamma, q \vdash p$ *onda* $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q$

(i $\leftrightarrow$) *isključenje dvopogodbe: ako* $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q$ *i* $\Gamma \vdash p$, *onda* $\Gamma \vdash q$; *ako* $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q$ *i* $\Gamma \vdash q$, *onda* $\Gamma \vdash p$

(u $\neg$) *uvođenje nijeka: ako* $\Gamma, p \vdash \neg p$, *onda* $\Gamma \vdash \neg p$

(i $\neg$) *isključenje nijeka: ako* $\Gamma, \neg p \vdash p$, *onda* $\Gamma \vdash p$

(ExF) *ex falso quodlibet: ako* $\Gamma \vdash p$ *i* $\Gamma \vdash \neg p$, *onda* $\Gamma \vdash q$

(Rep) *zamjena: ako* $\Gamma \vdash p[q]$ *i* $\Gamma \vdash q \leftrightarrow q'$, *onda* $\Gamma \vdash p[q']$, *gdje* $p[q]$ *znači:* q *je poiskaz* p

(u $\neg C$) *uvođenje djelatelja* C*: ako* $\vdash p$, *onda* $\vdash \neg Cp$

(u P) *uvođenje djelatelja* P*: ako* $\vdash p$, *onda* $\vdash Pp$

(Ax_n) *aksiom: u svakome retku dokaza možemo napisati predmetnojezično oprimjerenje bilo koje od sljedećih aksiomatskih shema:*

Ax1) $Cp \rightarrow C\neg p$

Ax2) $C(p \wedge q) \rightarrow (Cp \vee Cq)$

Ax3) $(\neg p \wedge q \wedge Cp \wedge \neg Cq) \rightarrow C(p \wedge q)$

Ax4) $(\neg p \wedge \neg q \wedge Cp \wedge Cq) \rightarrow C(p \wedge q)$

Ax5) $Ep \leftrightarrow \neg Rp$

Ax6) $Rp \leftrightarrow (Ap \vee Dp)$

Ax7) $Dp \rightarrow \neg Ap$

Ax8) $Ap \rightarrow \neg A\neg p$

Ax9) $Dp \rightarrow \neg D\neg p$

Ax10) $Ep \rightarrow E\neg p$.

Ax11) $Pp \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Cp)$

Ax12) $G^{+}p \leftrightarrow (p \wedge \alpha_k)$, *gdje* $lv(p) = k - 1$

Ax13) $G^{-}p \leftrightarrow (p \wedge \neg\alpha_k)$, *gdje* $lv(p) = k - 1$.

Dokažljivost iskaza p *iz skupa iskaza* Γ *u sustavu* LEC *bilježimo ovako: "*$\Gamma \vdash_{\text{LEC}} p$*".*

Pravila zaključivanja za dva nova djelatelja, prve četiri i posljednje tri aksiomatske sheme (Ax1–Ax4, Ax11-Ax13) preuzimamo iz LCG. Razmotrimo jesu li preostale aksiomatske sheme u skladu s Brouwerovim opisom prve faze izlaska svijesti. Podsjetimo da se, prema definiciji 21, otuđenost, jastvenost i popratne emocije primjenjuju se samo na atomarne iskaze ili njihove nijekove.

Aksiomatska shema Ax5 pokazuje odnos jastvenosti i otuđenosti. Ovdje smo vrijednosti, stupanj ili mjeru jastvenosti i otuđenosti prikazali binarno: "p je jastveno ako i samo ako nije otuđeno". S druge strane, vidjeli smo kako Brouwer o otuđenosti govori kao o "*mjeri* nepovratnosti odmaka" [11, str. 480, kurziv dodan]. Komplement otuđenosti Brouwer pak definira kao "*stupanj* usmjerenosti na sebstvo" [26, str. 418, kurziv dodan]. Stoga se čini da binaran prikaz ne odgovara Brouwerovu opisu. Uostalom, u potpoglavlju 2.4 predložili smo formulu $y = 1 - x$, gdje y označava mjeru jastvenosti, a x mjeru otuđenosti i njihove se vrijednosti nalaze unutar intervala $[0, 1]$. Ipak, detaljnijom analizom [11, str. 480] zaključili smo kako Brouwer ne tvrdi izričito kako jednostavni osjeti imaju mjeru ili stupanj jastvenosti i otuđenost, već u ovome kontekstu češće govori o složevinama osjetā ili "objektima". Stoga smo predložili tumačenje u kojem su jednostavni osjeti ili jastveni ili otuđeni, a od njih tvorene složevine ta svojstva mogu imati u nekoj mjeri. Primjerice, mjera otuđenosti neke složevine osjeta bit će veća što je veći broj otuđenih jednočlanih osjeta (definicija 23) od kojih se ta složevina sastoji.

Ax6 opisuje Brouwerovo tumačenje odnosa otuđenosti i jastvenosti prema želji i zazoru iz [11]. Prema ovoj shemi, zazor i želju subjekt može osjećati samo prema otuđenim osjetima; što je veća jastvenost ili otuđenosti objekta, veća je i dispozicija za želju ili zazor prema objektu [11, str. 480]. Međutim, analizirajući u potpoglavlju 2.4 definiciju jastvenosti iz [26], zaključili smo kako može postojati i drugo tumačenje, prema kojem subjekt želju osjeća prema jastvenim, a zazor prema otuđenim osjetima. Ovdje smo se odlučili za onu u skladu s Brouwerovim detaljnijim i kasnijim djelom. Da smo se pak odlučili za tumačenje u skladu s [26], šestu bismo aksiomatsku shemu zamijenili shemama $Rp \leftrightarrow Ap$ i $Ep \leftrightarrow Dp$.

Prema Ax7, želja prema nekome jednočlanome osjetu povlači izostanak zazora prema tome osjetu, kao što zazor povlači izostanak želje. Shema je, smatramo, u skladu s Brouwerovom teorijom. Kako smo vidjeli, u [11], Brouwer kontrastira želju i zazor. Sintagma "želja i strah (*fear*)" često se pojavljuje i u Brouwerovu ranome djelu, [27]. Ondje se te emocije spominju u negativnome svjetlu, jer svojstvo su onoga što je subjektu vanjsko, dok je tema [27] "povratak u sebstvo". Važno je primijetiti kako se u sedmoj shemi nalazi pogodba, a ne, kao što je to slučaj s petom shemom, dvopogodba. Izostanak želje ne znači međutim prisustvo zazora, niti manjak zazora znači postojanje želje. Protuprimjer će biti jastveni "elementi objekta", koje subjekt, kako slijedi iz navoda u [11, str. 480], niti može željeti, niti od njih zazirati. No, jednom kada su za neki element objekta prisutni, za taj se element želja i zazor međusobno se isključuju. Nadalje, Ax7 treba razmatrati zajedno s Ax6: osim što se međusobno isključuju, želja i zazor "iscrpljuju" otuđene osjete. Nakraju, u jednostavnoj logici izlaska svijesti neki jednočlan osjet nije moguće u ovoj mjeri željeti, a u onoj mjeri od njega zazirati; za jednočlane osjete ta se svojstva primjenjuju binarno. Ipak, mjera želje i zazora postoji za složevine osjetā, predstavljenje složenim iskazima, kao neka funkcija broja priželjkivanih i zaziranih jednočlanih osjeta, njihovih sastavnica.

Za aksiomatske sheme Ax8 i Ax9 ne nalazimo izravnu potvrdu u Brouwerovim tekstovima, no smatramo kako one oslikavaju temeljna načela zaključivanja o željama i zazorima, ali i sâm način na koji te pojmove primjenjujemo u svakodnevnome životu. Stoga nije bezrazložno pretpostaviti da se njima i Brouwer koristio na sličan način. Prema shemama Ax8 i Ax9, nije moguće istovremeno željeti neki osjet ili složevinu osjetā i njezin izostanak, lišidbu ili – nijek, kao ni zazirati od nekoga osjeta i njegove negacije. Ipak, uzimamo u obzir kako je ponekad smisleno kazati kako nešto istovremeno i želimo i od toga zaziremo, no smatramo kako tada nije riječ o "istome nečemu". Razmotrimo jedan primjer iz svakodnevnoga života, promjenu radnoga mjesta. Za nekoga možemo kazati da novo radno mjesto priželjkuje, ali ujedno ga se i pribojava ili od njega zazire. No tada, smatramo, ne govorimo o istim *aspektima* radnoga mjesta; možda postoje bolji uvjeti rada, ali dulje radno vrijeme, dva aspekta ili *svojstva* radnoga mjesta od kojih prvo subjekt priželjkuje, od drugoga zazire.

Prelazimo sada na Ax10. Na prvi je pogled možda najspornija upravo ta shema. Ipak, ona je ovdje kako bi osigurala intuitivnost pojmova želje i zazora. Nadalje, treba je promatrati zajedno sa svim prethodno opisanim shemama. Prema Ax6 želja i zazor primjenjuju se na otuđeno. Ako želju poimamo kao izostanak zazora, kao u Ax7, moramo osigurati da je govor o željenome i govor o zaziranome zaista govor o istim "vrstama" objekata – onima koji su subjektu otuđeni. Primjerice, kada bi vrijedilo $Rp \rightarrow E\neg p$, iz Dp bismo mogli pravilom uvođnja disjunkcije i temeljem Ax6 izvesi $E\neg p$. Tada, makar želi p, subjekt prema lišidbi p ne može osjećati ništa, što je posljedica Ax1 i Ax6; to smatramo neintuitivnim, pa kao aksiomatsku shemu ne uzimamo, možda *prima facie* privlačniji, iskaz $Rp \rightarrow E\neg p$. Nakraju, Aksiomatske sheme Ax11–Ax13

U sustavu LEC poučci su:

Th1) $Dp \leftrightarrow A\neg p$

Th2) $Cp \leftrightarrow C\neg p$

Th3) $P\neg p \leftrightarrow \neg Pp$.

Ovdje dokazujemo samo lijevu stranu Th1; obrat slijedi analogno. Za dokaz Th2 dovoljno je uzeti $\neg q$ za p u Ax1. U opravdanju svakoga retka pozivamo se na neko pravilo zaključivanja iz definicije 39. Iznimka su redci u kojima se pozivamo na nekoliko pravila, a koji klasično slijede iz prethodnih redaka. Tada pišemo "CPC"[17].

[17] Od eng. *classical propositional calculus.*

$$
\begin{array}{rrll}
1) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & Dp & \text{(op)} \\
2) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & Dp \vee Ap & \text{(1: u } \vee\text{)} \\
3) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & Rp \leftrightarrow (Ap \vee Dp) & \text{(Ax6)} \\
4) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & Rp & \text{(2, 3: i } \leftrightarrow\text{)} \\
5) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & Rp \rightarrow R\neg p & \text{(Ax10, Ax5: CPC)} \\
6) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & R\neg p & \text{(4, 5: i}\rightarrow\text{)} \\
7) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & R\neg p \leftrightarrow (A\neg p \vee D\neg p) & \text{(Ax6)} \\
8) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & A\neg p \vee D\neg p & \text{(6, 7: i } \rightarrow\text{)} \\
9) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & Dp \rightarrow \neg D\neg p & \text{(Ax9)} \\
10) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & \neg D\neg p & \text{(1, 9: i}\rightarrow\text{)} \\
11) & \{Dp, \neg A\neg p\} \vdash & A\neg p & \text{(8, 10: CPC)} \\
12) & \{Dp\} \vdash & A\neg p & \text{(11: i } \neg\text{)} \\
13) & \vdash & Dp \rightarrow A\neg p & \text{(12: u } \rightarrow\text{)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrll}
1) & \{P\neg p\} \vdash & \neg p \leftrightarrow \neg C\neg p & \text{(Ax11)} \\
2) & \{P\neg p\} \vdash & \neg p \leftrightarrow \neg Cp & \text{(1, Th2: Rep)} \\
3) & \{P\neg p\} \vdash & \neg(p \leftrightarrow \neg Cp) & \text{(2: CPC)} \\
4) & \{P\neg p\} \vdash & \neg Pp & \text{(3: Ax11)} \\
5) & \vdash & P\neg p \rightarrow \neg Pp & \text{(4: u } \rightarrow\text{)} \\
6) & \{\neg Pp\} \vdash & \neg(p \leftrightarrow \neg Cp) & \text{(Ax11)} \\
7) & \{\neg Pp\} \vdash & \neg(p \leftrightarrow \neg C\neg p) & \text{(6, Th2: Rep)} \\
8) & \{\neg Pp\} \vdash & \neg p \leftrightarrow \neg C\neg p & \text{(7: CPC)} \\
9) & \{\neg Pp\} \vdash & P\neg p & \text{(8: Ax11)} \\
10) & \vdash & \neg Pp \rightarrow P\neg p & \text{(9: u } \rightarrow\text{)} \\
11) & \vdash & \neg Pp \leftrightarrow P\neg p & \text{(5, 10: u } \leftrightarrow\text{)}
\end{array}
$$

3.2.5 Pouzdanost sustava LEC

Ovdje razmatramo metateorijsko svojstvo pouzdanosti (*soundness*) sustava proširene logike izlaska svijesti. To svojstvo iznosimo sljedećim poučkom, koji potom dokazujemo.

Poučak 3 (Pouzdanost sustava LEC)**.** *Ako* $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} p$*, onda* $\Gamma \vDash_{\text{LEC}} p$*.*

Dokaz. Sustav LEC sustav je naravne dedukcije. Dokazujemo da pravila zaključivanja čuvaju istinitost. To činimo matematičkom indukcijom na broj retka u dokazu. Skup pretpostavaka koje vrijede u retku n nekoga dokaza označavamo s "Γ_n", a iskaz izveden u retku n s "p_n".

Dokažimo najprije osnovicu indukcije: Ako $\Gamma_1 \vdash_{\mathrm{LEC}} p_1$, onda $\Gamma_1 \vDash_{\mathrm{LEC}} p_1$. U sustavu LEC, p_1 može biti ili pretpostavka ili iskaz dobiven primjenom pravila (Ax) iz definicije 39. Ako je p_1 pretpostavka, $\Gamma_1 = \{p_1\}$. Lako je uočiti kako za svaki p vrijedi $\{p\} \vDash_{\mathrm{LEC}} p$. Stoga osnovica vrijedi za taj slučaj.

Nadalje, p_1 može biti iskaz oblika neke od aksiomatskih shema 1-13 iz definicije 39. Ovdje dokazujemo da je svaki iskaz oblika neke od aksiomatskih shema valjan.

Valjanost aksiomatskih shema Ax1–Ax4 iz definicije 39 dokazana je u [86, str. 28–29] i [83, str. 5–6]. Ovdje dokazujemo valjanost shema 5-13.

Dokažimo valjanost Ax5 iz definicije 39. Pretpostavimo za neki model s nekom funkcijom, $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n Ep \leftrightarrow \neg Rp$. Iz toga klasičnom logikom dobivamo disjunkciju konjunkcija: $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Ep$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n \neg Rp$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n \neg Rp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n Ep$. Pretpostavimo $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Ep$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n \neg Rp$. Iz drugoga konjunkta pretpostavke izvodimo $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Rp$. Iz istinitosnih uvjeta 9 i 10 definicije 34 slijedi: $p \in EA$ i $p \in RA$. Prema točkama 1 i 2 definicije 30, $\lambda(p) = e$ i $\lambda(p) = r$, što protuslovi definiciji 29. Pretpostavimo sada $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n \neg Rp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n Ep$. Iz prvoga konjunkta pretpostavke izvodimo $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n Rp$. Iz istinitosnih uvjeta 9 i 10 definicije 34 slijedi: $p \notin EA$ i $p \notin RA$. Prema točkama 1 i 2 definicije 30 slijedi $p \notin ES^{\pm}$, što protuslovi točki 5 definicije 21.

Dokažimo valjanost Ax6 iz definicije 39. Pretpostavimo da postoji neki model s poviješću u kojoj vrijedi $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Rp \leftrightarrow (Ap \vee Dp)$. Tada vrijedi: $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Rp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Ap \vee Dp$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Ap \vee Dp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Rp$. Pretpostavimo najprije $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Rp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Ap \vee Dp$. Iz drugoga konjunkta klasičnom logikom slijedi: $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Ap$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Dp$. Iz istinitosnih uvjeta 11 i 12 iz definicije 34 slijedi: $p \notin AA_n$ i $p \notin DA_n$. Prema točkama 1 i 2 definicije 32 slijedi $p \notin RA_n$. No, prvi konjunkt pretpostavke jest $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Rp$. Iz njega slijedi, prema točki 10 definicije 34, $p \in RA$ Nadalje, prema točki 15 definicije 34, vrijedi $lv(Rp) \leq n$, pa $p \in RA_n$. Imamo protuslovlje. Pretpostavimo sada $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Ap \vee Dp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Rp$. Prema prvome konjunktu pretpostavke, vrijedi $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Ap$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Dp$. Neka $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Ap$. Tada, prema točki 11 definicije 34, $p \in AA_n$. Sada prema točki 2 definicije 32, $p \in RA_n$. Isto slijedi pretpostavimo li $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n Dp$, sada prema točki 12 definicije 34 i točki 1 definicije 32. No, prema drugome konjunktu pretpostavke, $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n Rp$, iz čega slijedi $p \in RA_n$. Imamo protuslovlje.

Dokažimo ovdje valjanost Ax7: $Dp \to \neg Ap$. Neka za neki model, povijest i trenutak vrijedi $\mathfrak{M}, \varphi' \vDash^n Dp$ i $\mathfrak{M}, \varphi' \nvDash^n \neg Ap$. Iz drugoga konjunkta pretpostavke izvodimo $\mathfrak{M}, \varphi' \vDash^n Ap$. Iz istinitosnih uvjeta 12 i 11 definicije 34 slijedi $p \in DA_n$ i $p \in AA_n$. Sada prema točkama 1 i 2 definicije 32 izvodimo: $\psi(n,p) = d$ i $\psi(n,p) = a$, što protuslovi definiciji 31.

Dokažimo valjanost Ax8 iz definicije 39. Pretpostavljamo $\mathfrak{M}, \varphi'' \vDash^n Ap$ i $\mathfrak{M}, \varphi'' \nvDash^n \neg A\neg p$. Iz drugoga konjunkta pretpostavke izvodimo $\mathfrak{M}, \varphi'' \vDash^n A\neg p$. Sada iz točke 11 definicije 34 slijedi $p \in AA_n$ i $\neg p \in AA_n$. Prema točki 2 definicije 32 izvodimo: $\psi(n,p) = a$ i $\psi(n,\neg p) = a$. Pozivamo se sada na točku 5 definicije 21, prema kojoj p stoji bilo za neki α_k, bilo za neki $\neg\alpha_k$. Neka $p = \alpha_k$. Imamo $\psi(n,\alpha_k) = a$ i $\psi(n,\neg\alpha_k) = a$. No, iz prvoga konjunkta, prema uvjetu i) definicije 31, slijedi $\psi(n,\neg\alpha_k) = d$, što protuslovi definiciji 31. Neka $p = \neg\alpha_k$. Imamo $\psi(n,\neg\alpha_k) = a$ i $\psi(n,\neg\neg\alpha_k) = a$. Iz drugoga konjunkta izvodimo $\psi(n,\alpha_k) = a$. Sada iz prvoga konjunkta, temeljem uvjeta ii) definicije 31 izvodimo $\psi(n,\alpha_k) = d$, što protuslovi definiciji 31.

Analogno dokazujemo Ax9 iz definicije 39. Pretpostavljamo $\mathfrak{M}, \varphi''' \vDash^n Dp$ i $\mathfrak{M}, \varphi''' \nvDash^n \neg D\neg p$. Iz drugoga konjunkta izvodimo $\mathfrak{M}, \varphi''' \vDash^n D\neg p$. Iz točke 12 definicije 34 slijedi $p \in DA_n$ i $\neg p \in DA_n$. Prema točki 1 definicije 32 izvodimo: $\psi(n,p) = d$ i $\psi(n,\neg p) = d$. Pozivamo se ponovno na točku 5 definicije 21, prema kojoj p stoji bilo za neki α_k, bilo za neki $\neg\alpha_k$. Neka $p = \alpha_k$. Imamo $\psi(n,\alpha_k) = d$ i $\psi(n,\neg\alpha_k) = d$. No, iz prvoga konjunkta, prema uvjetu ii) definicije 31, slijedi $\psi(n,\neg\alpha_k) = a$, što protuslovi definiciji 31. Neka $p = \neg\alpha_k$. Imamo $\psi(n,\neg\alpha_k) = d$ i $\psi(n,\neg\neg\alpha_k) = d$. Iz drugoga konjunkta izvodimo $\psi(n,\alpha_k) = d$. Sada iz prvoga konjunkta, temeljem uvjeta i) definicije 31 izvodimo $\psi(n,\alpha_k) = a$, što protuslovi definiciji 31.

Dokažimo valjanost Ax10. Neka postoji neka funkcija φ^+, za koju $\mathfrak{M}, \varphi^+ \vDash^n Ep$ i $\mathfrak{M}, \varphi^+ \nvDash^n E\neg p$. Iz istinitosnoga uvjeta 9 iz definicije 34 i prvoga konjunkta pretpostavke, zaključujemo $p \in EA$. Iz drugoga konjunkta i uvjeta 9 pak zaključujemo $\neg p \notin EA$. Pozivano se na točku 5 definicije 21. Neka $p = \alpha_k$. Imamo $\alpha_k \in EA$ i $\neg\alpha_k \notin EA$. Prema točki 1 definicije 30: $\lambda(\alpha_k) = e$ i $\lambda(\neg\alpha_k) \neq e$. No, prema uvjetu i) definicije 29, vrijedi $\lambda(\neg\alpha_k) = e$. Neka $p = \neg\alpha_k$. Imamo $\neg\alpha_k \in EA$ i $\neg\neg\alpha_k \notin EA$. Iz drugoga konjunkta izvodimo $\alpha_k \notin EA$. Prema točki 1 definicije 30: $\lambda(\neg\alpha_k) = e$ i $\lambda(\alpha_k) \neq e$. No, prema uvjetu i) definicije 29, vrijedi $\lambda(\alpha_k) = e$.

Dokažimo valjanost Ax11 iz definicije 39, tj. valjanost iskazā oblika $Pp \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Cp)$. Za dokaz slijeva nadesno, pretpostavimo $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Pp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p \leftrightarrow \neg Cp$. Iz $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p \leftrightarrow \neg Cp$ dobivamo $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n \neg Cp$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n \neg Cp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$. Pretpostavimo najprije $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n \neg Cp$. Iz $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n \neg Cp$

slijedi $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Cp$. Sada iz $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Cp$, a temeljem točke 7 definicije 34 dobivamo $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^{n-1} p$. No, vrijedi $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Pp$, iz čega slijedi $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^{n-1} p$. Pretpostavimo nadalje $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n \neg Cp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$. Iz $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n \neg Cp$ slijedi $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^{n-1} p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^{n-1} p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$, što s $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$ daje $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^{n-1} p$. No, vrijedi i $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Pp$, iz čega slijedi $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^{n-1} p$. Pretpostavka $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Pp$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p \leftrightarrow \neg Cp$ vodi do protuslovlja. Za dokaz aksiomatske sheme 11 zdesna nalijevo, pretpostavimo $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p \leftrightarrow \neg Cp$. Sada možemo ustvrditi: ili $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$. Neka $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$. Tada $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n \neg Cp$, odnosno $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n Cp$, što s $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p$ daje $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^{n-1} p$. Iz toga slijedi, temeljem uvjeta 8 definicije 34, $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Pp$. Neka nadalje $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$. To s $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n p \leftrightarrow \neg Cp$ daje $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n \neg Cp$, odnosno $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Cp$. Iz $\mathfrak{M}, \varphi^* \nvDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Cp$ dobivamo $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^{n-1} p$. Iz toga slijedi, temeljem uvjeta 8 definicije 34, $\mathfrak{M}, \varphi^* \vDash^n Pp$. Iskaz $Pp \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Cp)$ je valjan.

Dokažimo sada aksiomatsku shemu 12 iz definicije 39. Pretpostavimo za neke iskaze p i α_k, takve da $lv(p) = k - 1$, neki model s pripadajućom poviješću i neki trenutak n: $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n G^+p \leftrightarrow (p \wedge \alpha_k)$. Tada, $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n G^+p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n p \wedge \alpha_k$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n p \wedge \alpha_k$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n G^+p$. Pretpostavimo najprije $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n G^+p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n p \wedge \alpha_k$. Tada $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n \alpha_k$. No, iz $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n G^+p$, temeljem točke 13 definicije 34, slijedi $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n \alpha_k$. Imamo protuslovlje. Pretpostavimo sada $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \vDash^n p \wedge \alpha_k$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n G^+p$. Tada, prema točki 13 definicije 34, $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\bullet \nvDash^n \alpha_k$. Ponovno imamo protuslovlje, stoga je iskaz $G^+p \leftrightarrow (p \wedge \alpha_k)$ valjan.

Dokaz aksiomatske sheme 13 definicije 39 izvodi se analogno. Pretpostavimo $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n G^-p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n p \wedge \neg\alpha_k$. Tada $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n \neg\alpha_k$, tj. $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n \alpha_k$. No, iz $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n G^-p$, temeljem točke 14 definicije 34, slijedi $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n \alpha_k$. Pretpostavimo $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n p \wedge \neg\alpha_k$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n G^-p$. Iz prvoga konjunkta dobivamo $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n \alpha_k$. Iz drugoga pak konjunkta pretpostavke, prema točki 14 definicije 34, $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}, \varphi^\odot \vDash^n \alpha_k$. Imamo protuslovlje; valjana je svaka aksiomatska shema sustava LEC.

Time smo dokazali osnovicu matematičke indukcije. Formulirajmo sada induktivni korak. Umjesto "ako $\Gamma_n \vdash_{\text{LEC}} p_n$, onda $\Gamma_n \vDash_{\text{LEC}} p_n$" pisat ćemo "redak n je pouzdan". Isto ako, pravilo kojim smo uveli pouzdan redak n nazivat ćemo "pouzdanim pravilom". Induktivni korak glasi: ako su redak n i svi prethodni redci pouzdani, pouzdan je i redak $n + 1$. Prelazak iz retka n u redak $n + 1$ dokaza u sustavu LEC moguć je samo primjenom nekoga od pravila iz definicije 39 ili postavljanjem (pot)pretpostavke. Pozivamo se na dokaz osnovice, u kojem smo dokazali pouzdanost retka dobivenoga pretpostavkom ili oprimjerenjem neke od aksiomatskih shema iz definicije 39. Ovdje dokazujemo pouzdanost samo nekih, tipičnijih pravilā iz definicije 39. Tim dokazima završavamo dokaz pouzdanosti sustava LEC.

Pretpostavimo sada da vrijedi induktivna hipoteza. Dokažimo da vrijedi pouzdanost pravila (i $\wedge$) iz definicije 39. Neka se u retku $n+1$ dokaza nalazi neki iskaz p dobiven pravilom (i $\wedge$). Tada postoji neki redak dokaza $i < n+1$, u kojem se nalazi iskaz $p \wedge q$. Kako vrijedi induktivna hipoteza, redak i je pouzdan, odnosno $\Gamma_i \vDash p \wedge q$. kako je redak $n+1$ dostupan retku i, vrijedi $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$. Semantička posljedica skupa također je i semantička posljedica nadskupa, pa vrijedi $\Gamma_{n+1} \vDash p \wedge q$. Prema semantici konjunkcije, tj. točki 3 definicije 34, vrijedi $\Gamma_{n+1} \vDash p$. Dakle, redak $n+1$ dobiven pravilom (i $\wedge$) je pouzdan. Dokažimo pouzdanost pravila (u $\wedge$). Neka se u retku $n+1$ dokaza nalazi neki iskaz $p \wedge q$ dobiven pravilom (u $\wedge$). Tada postoje neki redci i, j takvi da $i, j < n+1$ i takvi da se u i nalazi iskaz p, a u j iskaz q. Prema induktivnoj hipotezi, redci i i j su pouzdani, pa $\Gamma_i \vDash p$ i $\Gamma_i \vDash p$. Kako je redak i dostupan retku $n+1$, vrijedi $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$. Kako je redak j dostupan retku $n+1$, vrijedi $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1}$. Semantička je posljedica skupa i semantička posljedica nadskupa, pa vrijedi $\Gamma_n \vDash p, q$. Prema semantici konjunkcije vrijedi $\Gamma_n \vDash p \wedge q$. Dakle, redak $n+1$ dobiven pravilom (u $\wedge$) je pouzdan.

Pod pretpostavkom induktivne hipoteze, dokažimo pouzdanost pravila (u $\neg$). Neka je u dokazu u retku $n+1$ primjenom pravila (u $\neg$) dokazano $\neg p$. Tada, u nekome retku $i < n+1$ stoji $\neg p$, temeljem skupa pretpostavaka p, Γ_i. Prema induktivnoj hipotezi, svaki je redak prije $n-1$ suvisao. No, ako $p, \Gamma_i \vDash \neg p$, tada je $\{p\} \cup \Gamma_i$ nesuvisao. Stoga odbacujemo pretpostavku p. Pouzdanost pravilo (i $\neg$) dokazuje se analogno. Dokažimo još pouzdanost pravila (ExF). Neka $\Gamma_{n+1} \vdash q$, pravilom (ExF). Tada postoji neki redak i, u kojem $\Gamma_i \vdash p$ i postoji neki redak j, u kojem $\Gamma_j \vdash \neg p$. Prema induktivnoj hipotezi $\Gamma_i \vDash p$ i $\Gamma_j \vDash \neg p$. Kako je redak $n+1$ dostupan retku i i retku j, $\Gamma_{n+1} \vDash p, \neg p$. Kako $\{p, \neg p\} \vDash q$, $\Gamma_{n+1} \vDash q$.

Time smo dokazali pouzdanost redaka dobivenih tipičnijim pravilima dokazivanja iz definicije 39. Slijedi da je istinitost nekoga iskaza p očuvana u svakome retku dokaza u sustavu LEC, tj. ako $\Gamma \vdash_{\text{LEC}} p$, onda $\Gamma \vDash_{\text{LEC}} p$.

□

3.2.6 Potpunost sustava LEC

U dokazu potpunosti sustava LEC nadovezujemo se na dokaz ovoga svojstva za LCG u [86, str. 63–78], koji prema [62, str. 31–45] prilagođavamo za potrebe dokazivanja jake potpunosti. Za potpunost jednostavne logike izlaska svijesti koristimo se dokazom u Henkin-Lindenbaumovu stilu, pomoću kanonskoga modela. U [86] dokaz je korišten u jeziku s djelateljima $\neg, \wedge, N$, pozivajući se na izražajnu potpunost skupa poveznikā $\{\neg, \wedge\}$, kao i definirljivost djelatelja C pomoću djelatelja N (definicija 15). Za dokaz potpunosti sustava LEC upotrebljavamo isti pristup. Pritom, naravno, kao primitivan uzimamo djelatelj P iz jezika $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$.

Dokažimo najprije definirljivost priroka A, E, R pomoću priroka D. Podsjetimo na pravilo zamjene (Rep) iz definicije 39, prema kojem podiskaz q nekoga iskaza p u svakome retku dokaza možemo zamijeniti nekim q' u slučaju da $q \leftrightarrow q'$. Uočimo najprije kako se prema aksiomatskoj shemi 5 iz definicije 39, svaki iskaz oblika Ep možemo zamijeniti iskazom oblika $\neg Rp$. Stoga možemo upotrebljavati samo jedan od ovih dvaju priroka. Odlučimo se za R. Sada, slijedeći aksiomatsku shemu 7, svaki iskaz oblika Rp možemo zamijeniti s $Ap \vee Dp$. Naposljetku, prisjetimo se kako $\mathrm{LEC} \vdash Dp \leftrightarrow A\neg p$, što smo dokazali na stranici 109. Stoga je svaki od priroka logike LEC izraziv pomoću priroka D. S time u skladu, u dokazu potpunosti rabit ćemo "podjezik" jezika $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$, koji nazivamo $\mathcal{L}_{\neg\wedge PD}$.

Uvodimo sada pojam "maksimalnoga suvisloga skupa" iskaza logike LEC. Nadalje podrazumijevamo jezik $\mathcal{L}_{\neg\wedge PD}$. Definirajmo najprije sintaktički pojam suvislosti ili konzistentnosti skupa iskazā.

Definicija 40 (Suvislost (konzistentnost) skupa iskazā logike LEC)**.** *Skup iskaza* Γ *logike* LEC *nesuvisao je akko postoji konačan skup* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \Gamma$ *takav da* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}} \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$. *Skup je iskaza suvisao akko nije nesuvisao. Kada* $\Gamma = \{p\}$, *umjesto o suvislosti* $\{p\}$ *govorit ćemo o suvislosti* p

Definicija 41 (Maksimalan suvisao skup iskazā logike LEC)**.** Γ^{max} *je maksimalan suvisao skup iskaza logike* LEC *akko je* Γ^{max} *suvisao, a svaki pravi nadskup* Γ^{max} *nesuvisao.*

Lema 1. *Za svaki iskaz* p *i svaki maksimalan suvisao skup* Γ^{max}, *ako* $\Gamma^{max} \vdash_{\mathrm{LEC}} p$, *onda* $p \in \Gamma^{max}$.

Dokaz. Dokaz izvodimo prema [62, str. 32]. Pretpostavimo da je Γ^{max} maksimalan suvisao skup iskaza logike LEC. Pretpostavimo nadalje $\Gamma^{max} \vdash_{\mathrm{LEC}} p$. Dokaz je *reductio*; neka $p \notin \Gamma^{max}$. Prema definiciji 41, $\Gamma^{max} \cup \{p\}$ je nesuvisao. Tada, prema definiciji 40 slijedi $\Gamma^{max} \vdash_{\mathrm{LEC}} \neg p$. Kako smo gore smo izveli $\Gamma^{max} \vdash_{\mathrm{LEC}} p$, slijedi $\Gamma^{max} \vdash_{\mathrm{LEC}} p \wedge \neg p$, što prema definiciji 40 znači da je Γ^{max} nesuvisao, a to protuslovi početnoj pretpostavci. □

U dokazu potpunosti sustava LEC bit će nam potrebna inačica Lindenbaumove leme za skup iskazā proširene logike izlaska svijesti. Iznosimo prije toga još nekoliko definicija.

Definicija 42 (Složenost iskazā logike LEC)**.** *Složenost iskaza p logike* LEC *–* $c(p)$ *– jest broj pojavaka djelatelja* $\neg, \wedge, P, D$ *u* p.

Sada možemo uvesti pojam "visine" iskazā [86, str. 70]:

Definicija 43 (Visina iskazā logike LEC)**.** *Visina iskaza p logike* LEC, $h(p) = lv(p)+c(p)$.

Sada možemo iskaze "poredati po visini" (usp. [86, str. 70]):

$H_1 = \{p \mid h(p) = 1\} = \{\alpha_1\}$
$H_2 = \{p \mid h(p) = 2\} = \{\alpha_2, \neg\alpha_1, P\alpha_1, D\alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_1\}$
$H_3 = \{p \mid h(p) = 3\} = \{\alpha_3, \neg\neg\alpha_1, PP\alpha_1, PD\alpha_1, P\neg\alpha_1, D\neg\alpha_1, \neg P\alpha_1, \neg D\alpha_1, \neg\alpha_2, P\alpha_2, D\alpha_2, \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_1), \alpha_1 \wedge \neg\alpha_1, \neg\alpha_1 \wedge \alpha_1, P(\alpha_1 \wedge \alpha_1), P\alpha_1 \wedge \alpha_1, D\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_1 \wedge P\alpha_1, \alpha_1 \wedge D\alpha_1, \alpha_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_1), (\alpha_1 \wedge \alpha_1) \wedge \alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_2, \alpha_2 \wedge \alpha_1\}$
$\vdots$

Vidimo kako je najmanja visina nekoga iskaza visina 1, budući da je najmanja razina nekoga iskaza također 1. Primijetimo također kako je, u skladu s točkom 5 definicije 21, Dp iskaz ako $p = \alpha_n$ ili $p = \neg\alpha_n$. Zato se primjerice, u skupu H_3 nakon $PP\alpha_1$ ne nalazimo "$DD\alpha_1$", koji nije iskaz u LEC, prema definiciji 21. Nadalje, svaki $H_n = \{p \mid h(p) = n\}$ ima konačan broj članova. Pomoću visine iskazā možemo na učinkovit način prebrojiti iskaze logike LEC; vidimo također kako skup svih iskaza logike LEC odgovara skupu $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} H_n$, koji je prebrojiv. Svi se iskazi logike LEC u jeziku $\mathcal{L}_{\neg\wedge PD}$ mogu poredati u niz:

$$p_1, p_2, p_3 \dots$$

tako da svaki iskaz kao pokazatelj dobije pozitivan cijeli broj.

Sada, temeljem poretka iskaza, možemo po volji odabran suvisao skup iskaza logike LEC, $\Gamma = \Gamma_1$, postupno povećavati dodavajući mu elemente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} H_n$ dodavanjem kojih svaki sljedeći Γ_n ostaje suvisao [62, str. 33].

Definicija 44. *Neka je Γ_1 po volji odabran suvisao skup iskaza logike* LEC*. Tada:*

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{p_n\}, & \textit{ako je } \Gamma_n \cup \{p_n\} \textit{ suvisao} \\ \Gamma_n, & \textit{inače.} \end{cases}$$

$\Theta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \Gamma_n$.

Lema 2 (Lindenbaumova lema za LEC)**.** *Svaki je suvisao skup iskazā logike* LEC *podskup barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa.*

Dokaz. Dokaz leme 2 preuzimamo iz [62, str. 32–34]. On se sastoji od dvaju dijelova. Za po volji odabran suvisao skup iskaza Γ_1 izgradili smo nadskup Θ. Treba pokazati kako je Θ suvisao i maksimalan. Dokažimo najprije da je Θ suvisao. Pretpostavimo da je Θ nesuvisao. Prema definiciji 40, tada postoji neki konačan skup $\{p_i \dots p_n\} \subset \Theta$ u kojem su iskazi poredani po visini (ali ne moraju nužno slijediti jedan za drugim) za koji vrijedi $\Theta \vdash_{LEC} \neg(p_i \wedge \dots \wedge p_n)$. Tada postoji neki konačan podskup Θ koji je nesuvisao. No, prema načinu izgradnje skupa Θ, svaki je konačan poskup Θ suvisao. Dokažimo sada da je Θ maksimalan suvisao, tj. da je svaki pravi nadskup Θ nesuvisao. Pretpostavimo da $\Theta \subset \Theta'$ i da je Θ' suvisao. Tada postoji neki iskaz p_m takav da $p_m \notin \Theta$ i $p_m \in \Theta'$. Tada je $\Theta \cup \{p_m\}$ suvisao. Tada je i $\Gamma_m \cup \{p_m\}$ suvisao, prema postupku izgradnje skupa Θ. Prema istome postupku, slijedi $p_m \in \Gamma_{m+1}$. Kako je Γ_{m+1} korak u izgradnji skupa Θ, slijedi $p_m \in \Theta$, što protuslovi gornjoj postavci da $p_m \notin \Theta$. Time smo dokazali lemu 2. □

Kako rabimo jezik $\mathcal{L}_{\neg\wedge PD}$, u dokazu potpunosti bit će nam potrebna sljedeća lema:

Lema 3 (Članstvo u maksimalnome suvislome skupu (za $\neg, \wedge$))**.**

1. $\neg p \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \notin \Gamma^{max}$

2. $p \wedge q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \in \Gamma^{max}$ *i* $q \in \Gamma^{max}$.

Dokaz. Dokaz izvodimo prema [62, str. 35]. Za dokaz stavka 1, neka $\neg p \in \Gamma^{max}$. Neka $p \in \Gamma^{max}$. Tada $\{\neg p, p\} \subseteq \Gamma^{max}$. Iz toga dobivamo $\Gamma^{max} \vdash_{\text{LEC}} \neg p \wedge p$. No, vrijedi $\Gamma^{max} \vdash_{\text{LEC}} \neg(\neg p \wedge p)$, kako je Γ^{max} suvisao, prema definiciji 41. Neka $p \notin \Gamma^{max}$. Neka $\neg p \notin \Gamma^{max}$. Tada, prema definiciji 41, $\Gamma^{max} \cup \{p\}$ i $\Gamma^{max} \cup \{\neg p\}$ nisu maksimalni suvisli skupovi. Iz toga slijedi, prema definiciji 40, kako postoje neki $q, r \in \Gamma^{max}$, za koje $\Gamma^{max} \vdash_{\text{LEC}} \neg(q \wedge p)$ i $\Gamma^{max} \vdash_{\text{LEC}} \neg(r \wedge \neg p)$. Dakle, $\{q, r\} \subset \Gamma^{max}$. No, iz $\neg(q \wedge p)$ i $\neg(r \wedge p)$ u sustavu LEC (pravilima samo klasične logike) slijedi $\neg(q \wedge r)$. Tada $\{q, r\} \nsubseteq \Gamma^{max}$, što protuslovi gornjoj postavci. Za dokaz stavka 2, neka $p \wedge q \in \Gamma^{max}$. Tada $\{p \wedge q\} \subseteq \Gamma^{max}$. Pravilom (i $\wedge$) iz definicije 39 izvodimo $\{p \wedge q\} \vdash_{\text{LEC}} p$ i $\{p \wedge q\} \vdash_{\text{LEC}} q$. Prema lemi 1, slijedi $p \in \Gamma^{max}$ i $q \in \Gamma^{max}$. Dokažimo nakraju obrat. Neka $p \in \Gamma^{max}$ i $p \in \Gamma^{max}$. Tada $\{p, q\} \subseteq \Gamma^{max}$. Prema pravilu (u $\wedge$) iz definicije 39 $\{p, q\} \vdash_{\text{LEC}} p \wedge q$. Prema lemi 1, $p \wedge q \in \Gamma^{max}$. □

Uvodimo pojam "niza maksimalnih suvislih skupova" (usp. [86, str. 66]).

Definicija 45 (Niz maksimalnih suvislih skupova)**.** *Neka je* Γ^k *maksimalan suvisao skup. Tada:*

$\Gamma^{k-1} = \{p \mid Pp \in \Gamma^k\}$.

Sada dokazujemo ovu lemu:

Lema 4. *Za svaki* $k > 1$: Γ^k *je maksimalan suvisao skup.*

Dokaz. Dokaz preuzimamo iz [86, str. 72–73.], uz razliku što govorilo o prošlosnome djelatelju P. Lemu 4 dokazujemo u dvjema fazama. Najprije dokazujemo suvislost, a potom maksimalnost svakoga Γ^k. Formuliramo ovdje induktivnu hipotezu: ako je suvisao Γ^k, suvisao je i Γ^{k-1}. Pretpostavimo induktivan korak. Dokažimo da je Γ^{k-1} suvisao. Dokaz je *reductio*; pretpostavimo da Γ^{k-1} nije suvisao. Prema definiciji 40, postoji neki $\{p_i, \ldots p_n\} \subseteq \Gamma^{k-1}$ takav da $\Gamma^{k-1} \vdash_{\text{LEC}} \neg(p_i \wedge \ldots \wedge p_n)$. Budući da je prema induktivnoj hipotezi Γ^k maksimalan suvisao, $\Gamma^k \vdash_{LEC} \neg(p_i \wedge \ldots \wedge p_n)$. Primjenjujući pravilo (u P) iz definicije 39, sada možemo izvesti $\Gamma^k \vdash_{\text{LEC}} P\neg(p_i \wedge \ldots \wedge p_n)$. U sustavu LEC poučci su $P\neg p \leftrightarrow \neg Pp$ (vidi str. 109) i $(Pp \wedge Pq) \leftrightarrow P(p \wedge q)$ [86, str. 36]. Stoga izvodimo $\Gamma^k \vdash_{\text{LEC}} \neg(Pp_i \wedge \ldots \wedge Pp_n)$. Prisjetimo se, pretpostavili smo $\{p_i, \ldots, p_n\} \subseteq \Gamma^{k-1}$. Sada, prema definiciji 45 izvodimo $\{Pp_i, \ldots, Pp_n\} \subseteq \Gamma^k$. No, $\Gamma^k \vdash_{LEC} \neg(Pp_i \wedge \ldots \wedge Pp_n)$, pa je Γ^k nesuvisao, što protuslovi induktivnoj hipotezi.

Dokažimo sada da je za svaki $k < 1$ skup Γ^k *maksimalan* suvisao. Postavimo induktivnu hipotezu: ako je Γ^k maksimalan suvisao, takav je i Γ^{k-1}. Pod pretpostavkom induktivnoga koraka, pretpostavimo i da je Γ^{k-1} suvisao, ali ne i maksimalan. Prema definiciji 44, tada postoji neki iskaz p_i takav da takav da $p_i \notin \Gamma^{k-1}$ te je $\{p_i\} \cup \Gamma^{k-1}$ suvislo. Kako $p_i \notin \Gamma^{k-1}$, prema definiciji 45 izvodimo $Pp_i \notin \Gamma^k$. Prema točki 1 leme 3 slijedi $\neg Pp_i \in \Gamma^k$. Vrijedi $\neg Pp_i \leftrightarrow P\neg p_i$ (str. 109). Kako je Γ^k maksimalan suvisao, prema lemi 1 slijedi $P\neg p_i \in \Gamma^k$. Prema definiciji 45, imamo $\neg p_i \in \Gamma^{k-1}$. Tada je $\Gamma^{k-1} \cup \{p_i\}$ nesuvislo, prema definiciji 40. No, vidjeli smo kako je $\{p_i\} \cup \Gamma^{k-1}$ suvislo, prema pretpostavci da je Γ^{k-1} suvisao, ali ne i maksimalan. Imamo protuslovlje, pa vrijedi lema 4. □

Kao nadopunu lemi 3 sada uspostavljamo sljedeću lemu:

Lema 5 (Članstvo u maksimalnome suvislome skupu (za P))**.**

$$Pp \in \Gamma^k \quad \textit{akko} \quad p \in \Gamma^{k-1}.$$

Dokaz. Lema 5 slijedi izravno iz definicije 45. □

Iznesimo sada radi preglednosti neke skupove iz definicija 22, 23, 30 i 32 na stranicama 97 i 102, kojima se koristimo pri dokazu istinitosti u kanonskome modelu, kojega konstrukciju započinjemo odmah potom.
$ES = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots\}$

$ES^{\pm} = \{\alpha_1, \neg\alpha_1, \alpha_2, \neg\alpha_2 \ldots\} = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}$, gdje $\pm\alpha_n$ označava α_n ili $\neg\alpha_n$
$RA \subseteq ES^{\pm}$
$RA_k = \{\pm\alpha_n \mid n \leq k\}$
$DA_k \subseteq RA_k$.

Potpunost sustava LEC dokazujemo pomoću kanonskoga modela. Tvrdit ćemo da je neki maksimalan suvisao skup iskaza zadovoljiv (definicija 35, str. 104) takvim modelom. Za neki maksimalan suvisao skup rabimo oznaku Γ^k (vidi definiciju 45.)

Uvodimo sada pojmove analogne onima iz potpoglavlja 3.2.3 (od str. 99), kojima ćemo se koristiti pri izgradnji kanonskoga modela.

Definicija 46 (Kanonski mogući svijet). *Kanonski mogući svijet (s_n^{kan}) neka je konjunkcija $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n$. Za svaki mogući svijet s_n kažemo da je složenosti n, gdje n odgovara najvećem pokazatelju nekoga atomarnoga podiskaza α_n.*

Definicija 47 (Kanonski svemir). *Kanonski svemir (B_n^{kan}) skup je svih s_n^{kan}. Svaki je B_n složenosti n.*

Definicija 48 (Skup kanonskih mogućih svjetova). *Skup kanonskih mogućih svjetova unija je svih kanonskih svemira: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} B_n^{kan}$.*

Definicija 49 (Kanonska povijest). *Funkcija "kanonske povijesti"*[18] $\varphi : \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} B_n^{kan}$ *funkcija je koja svakomu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ pridružuje točno jedan $s_n^{kan} \in B_n^{kan}$, takva da za svaki $k \geq n$:*

$$\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k \alpha_n \textit{ akko } \alpha_n \in \Gamma^k.$$

Definicija 50 (Kanonska konativnost). *Funkcija "kanonske konativnosti" $\psi^{kan} : (\mathbb{N}_{>0} \times RA) \rightarrow \Psi$ funkcija je koja svakomu uređenomu paru (k, p) pridružuje točno jedan od članova Ψ, takva da:*

i) $\psi^{kan}(k,p) = d$, *akko* $Dp \in \Gamma^k$

ii) $\psi^{kan}(k,p) = a$, *akko* $D\neg p \in \Gamma^k$.

Definicija 51 (Kanonski odmak). *Funkcija "kanonskoga odmaka" $\lambda^{kan} : ES^{\pm} \rightarrow \Lambda$ funkcija je koja svakomu $p \in ES^{\pm}$ pridružuje točno jedan od članova Λ, takva da:*

i) $\lambda^{kan}(p) = r$ *akko* $Dp \in \Gamma^k$ *ili* $D\neg p \in \Gamma^k$

[18] Usp. [86, str. 67].

ii) $\lambda^{kan}(p) = e$ *akko* $\lambda^{kan}(p) \neq r$.

Iznosimo sada definiciju samoga kanonskoga modela.

Definicija 52 (Kanonski model LEC)**.** *Kanonski model* LEC *uređena je četvorka:* $\mathfrak{M}^{kan} = \langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} B_n^{kan}, \varphi^{kan}, \lambda^{kan}, \psi^{kan} \rangle$.

U dokazu poučka potpunosti ključna je sljedeća lema:

Lema 6 (Zadovoljivost u kanonskome modelu)**.** *Za svaki iskaz* p *i svaki* $n \geq lv(p)$*:*

$$\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k p \text{ akko } p \in \Gamma^k.$$

Dokaz. Lemu 6 dokazujemo matematičkom indukcijom prema visini iskazā. Osnovica indukcije za iskaz oblika α_1 vrijedi prema definiciji 49. Pod pretpostavkom induktivnoge hipoteze, izvodimo dokaz za iskaze oblika: $\neg p, p \wedge q, Pp, Dp$, budući da dokaz potpunosti izvodimo za jezik $\mathcal{L}_{\neg\wedge PD}$.

Za iskaze oblika $\neg p$, prema induktivnoj hipotezi: $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k p$ akko $p \in \Gamma^k$. Klasičnom logikom dobivamo $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \nvDash^k p$ akko $p \notin \Gamma^k$. Sada slijedi $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k \neg p$ akko $\neg p \in \Gamma^k$. Lijevu stranu dvopogodbe izvodimo prema točki 2 definicije 34, a desnu stranu izvodimo prema točki 1 leme 3 (usp. [62, str. 41]).

Za iskaze oblika $p \wedge q$, prema induktivnoj hipotezi: $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k p$ akko $p \in \Gamma^k$ i $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k q$ akko $q \in \Gamma^k$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k p$ i $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k q$ akko $p \in \Gamma^k$ i $q \in \Gamma^k$. Sada slijedi: $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k p \wedge q$ akko $p \wedge q \in \Gamma^k$. Lijeva strana vrijedi prema točki 3 definicije 34. Desnu stranu dobivamo pomoću druge točke leme 3. (usp. [62, str. 41]).

Za iskaze oblika Pp, pretpostavimo najprije $Pp \in \Gamma^k$. Tada, prema definiciji 45 vrijedi: $p \in \Gamma^{k-1}$. Prema induktivnoj hipotezi, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{k-1} p$. Prema definiciji 45, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k Pp$. Sada pretpostavimo $Pp \notin \Gamma^k$. Prema definiciji 45, vrijedi $p \notin \Gamma^{k-1}$. Prema induktivnoj hipotezi, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \nvDash^{k-1} p$. Prema točki 8 definicije 34, imamo $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \nvDash^k Pp$. Dakle, ako $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k Pp$, onda $Pp \in \Gamma^k$ (usp. [86, str. 74].

Za iskaze oblika Dp, treba dokazati $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k Dp$ akko $Dp \in \Gamma^k$. Pretpostavimo najprije $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k Dp$. Prema točki 12 definicije 34 (stranica 104), $p \in DA_k$. Prema točki 1 definicije 32 (stranica 102), $\psi^{kan}(k, p) = d$. Prema stavku i) definicije 50 sada slijedi: $Dp \in \Gamma^k$. Pretpostavimo sada $Dp \in \Gamma^k$. Prema stavku i) definicije 50, $\psi^{kan}(k, p) = d$. Prema točki 1 definicije 32, $p \in DA_k$. Prema točki 12 definicije 34, slijedi $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^k Dp$. Time smo dovršili dokaz matematičkom indukcijom te dokazali lemu 6. □

Dokazujemo sada sljedeću lemu [62, str. 43]:

Lema 7. *Ako je skup iskaza* Γ *suvisao, onda je i zadovoljiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Γ suvisao. Prema lemi 2, $\Gamma \subseteq \Gamma^k$. Prema lemi 6, Γ^k je zadovoljiv kanonskim modelom. Ako je skup iskaza zadovoljiv, zadovoljiv je i njegov podskup. Dakle, Γ je zadovoljiv. □

Formulirajmo sada i dokažimo poučak potpunosti sustava LEC.

Poučak 4 (Potpunost sustava LEC)**.** *Ako* $\Gamma \vDash_{\mathrm{LEC}} p$*, onda* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}} p$*.*

Dokaz. Dokaz izvodimo prema [62, str. 43]. Protupostavom leme 7: ako je Δ nezadovoljiv, onda je i nesuvisao. Tada, ako je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljivo, onda je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvislo. Prema definicijama 35 i 36 na stranici 104 te definiciji 40 na stranici 114, vrijedi: ako $\Gamma \vDash_{\mathrm{LEC}} p$, onda $\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}} p$.

□

3.3 Proširena logika izlaska svijesti (LEC$^+$)

3.3.1 Motivacija za LEC$^+$

Jednostavna logika izlaska svijesti oslikava tvorbu vremenskih nizova osjetā, koristeći se pojmovima razine iskaza i razine jezika preuzetima iz logike promjene LCG. Isto tako, u LEC jednomjesnim prirocima jastvenosti, otuđenosti, želje i zazora svijet osjetā subjekta dodatno je regimentiran; možemo prikazati neke od temeljnih značajki Brouwerove filozofije. Ipak, u LEC upotrebljavamo pojmove svojstvene isključivo prvoj fazi izlaska svijesti. Vremenski nizovi osjetā, naravno, produkt su vremenske pozornosti te i se njihova jastvenost i otuđenost, pa time i dispozicija da budu predmetima želje i zazora opisuju u [11] prije no što se u svijesti javlja uzročna pozornost.

Pojava uzročne pozornosti, kako smo pokazali u prethodnome poglavlju, od presudne je važnosti za razvoj svijesti; njome se svijet osjetā subjekta ustabiljuje, nastaju objekti i stvari, a naposljetku i vanjski svijet subjekta. Isto tako, uzročna pozornost presudnu ulugu igra i u društvenoj fazi izlaska svijesti; subjekt uzročnom pozornošću prepoznaje druge činitelje, a koristi se i jezikom kao posebnim slučajem te pozornosti. Stoga smatramo kako je za vjeran prikaz Brouwerove teorije izlaska svijesti ključno razmotriti formalni prikaz njegova poimanja uzročnosti.

Također, prisjetimo se kako je uzročnost u "svakodnevnome", ili barem u "svakodnevnijem" smislu samo jedna faceta brouwerovske uzročne pozornosti. Naime, uzročnom pozornošću nastaju iterativne složevine osjetā. Ako se redoslijed osjetā u takvim složevinama ne mijenja, govorimo o uzročnim nizovima. Ako je redoslijed promjenljiv, radi se o objektima, koji su složevine otuđenih i jastvenih osjeta. Kada su objekti potpuno otuđeni, nazivamo ih stvarima (potpoglavlje 2.5). Ovdje ćemo pažnju posvetiti samo prvomu dijelu uzročne pozornosti, tvorbi uzročnih nizova. Razlog tomu je što će jezik proširene logike izlaska svijesti biti jezik iskazne logike, dok je za govor o objektima, smatramo, potrebna logika (barem) prvoga reda.

Usmjerivši pažnju samo na uzročne nizove, među njima pronalazimo neke posebnosti. Prisjetimo se, za Brouwera je uzročni niz "fantazija" [26, str. 418] i "zabluda" [11, str. 487]; uzročna koherentnost svijeta pak "tamna sila ljudske misli" [26, str. 419]. Ipak, smatramo kako Brouwerov "uzročni antirealizam" nije relevantan za samu formalizaciju uzročnih nizova: oni postoje za subjekta kao tvoreni njegovom uzročnom pozornosti i pokazuju neke pravilnosti, što je dovoljno za njihov formalni prikaz.

Uostalom, među istaknutim svojstvima Brouwerovih uzročnih nizova ne nalazi se samo njihova "obmanjivost", već i neka konkretna odstupanja od načela koja vrijede u velikome dijelu što logičkih, što filozofijskih analiza uzročnosti. O jednome značajnome svojstvu takve uzročnosti već smo govoriti u potpoglavlju 2.7. Naime, Brouwer smatra kako "ulančavanjem uzročnih nizova ne moramo nužno dobiti novi uzročni niz" [11, str. 481]. To poimamo kao odricanje svojstva prijelaznosti fenomenu uzročnosti. S druge strane, prijelaznost se često uzimlje kao jedno od temeljnih načela uzročnosti, pa svoje mjesto pronalazi u i u većem dijelu formalnih karakterizacija uzročnosti. Ipak, postoje formalizmi u kojima nalazimo odstupanja od ovoga načela. Primjerice, Weingartner u [92] u kontekstu filozofije znanosti razmatra nekoliko uzročnosti, za dvije od kojih načelo prijelaznosti nije valjano. Kovač u [64] u kontekstu Gödelova poimanja uzročnosti tu relaciju prikazuje u logici opravdanja, nudeći uzročno tumačenje opravdajnih oznaka. U takvu tumačenju uzročnost nije prijelazna u pravome smislu. S druge strane, prijelazan je *uzročni neksus* [64, str. 179]. Ovdje iznosimo drukčiji sustav, sustav uzročnih iskaza, "proširenu logiku izlaska svijesti" ili LEC^+.

Nakraju, subjekt uspostavlja uzročne nizove pomoću rastućih vremenskih nizova, koje smo oslikali na poseban način rastućim mogućim svjetovima. Već i sama podlogika LEC^+, LEC, u uzročne odnose donosi stanovite posebnosti, kojih će nam formalni prikaz omogućiti da bolje razumijemo taj dio Brouwerove "pozadinske filozofije".

3.3.2 Jezik LEC$^+$

Jezik proširene logike izlaska svijesti nazivamo $\mathcal{L}_{\text{LEC}^+}$.

Definicija 53 (Rječnik $\mathcal{L}_{\text{LEC}^+}$)**.**

1. *iskazna slova:* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$
2. *logički poveznici:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. *ostali djelatelji:* $C, Cau, G^+, G^-, P, \circ, \Box, \Diamond$
4. *jednomjesni priroci:* A, D, E, R
5. *zagrade:* $(,)$.

Definirajmo sada pojam "potkonjunkcije" nekoga mogućega svijeta, kojim ćemo se koristiti u definiciji iskaza.

Definicija 54 (Potkonjunkcija)**.** *Iskaz* $\bigwedge \pm\alpha_m$ *potkonjunkcija je nekoga mogućega svijeta* s_n *(* $\bigwedge \pm\alpha_m \subset_\wedge s_n$*) ako i samo ako je* $\bigwedge \pm\alpha_m$ *tvoren od konjunkcije koja predstavlja* s_n *pravilima uvođenja ili isključenja konjunkcije (usp. definicija 39).*

Definicija 55 (Iskaz $\mathcal{L}_{\text{LEC}^+}$)**.**

$$p ::= \alpha_n \mid \neg p \mid p \wedge p \mid p \vee p \mid p \rightarrow p \mid p \leftrightarrow p \mid Cp \mid Pp \mid G^+p \mid G^-p \mid \Box p \mid \Diamond p \mid A\pm\alpha_n \mid D\pm\alpha_n \mid$$

$$E \pm \alpha_n \mid R \pm \alpha_n \mid Cau(\bigwedge \pm\alpha_m, \bigwedge \pm\alpha_{m'}) \mid \circ \bigwedge \pm\alpha_m.$$

Kako u LCG i LEC, tako i u LEC$^+$ razlikujemo razinu jezika i minimalnu razinu iskaza, prema definicijama 3 i 5 na stanici 84.

Ovdje iznosimo samo tumačenje djelatelja karakterističnih za jezik proširene logike izlaska svijesti. Za ostatak upućujemo na definiciju 21. Iskaz $Cau(p, q)$ čitamo: "p je uzrok q". Alternativno, $Cau(p, q)$ možemo čitati kao: "q je učinak p", ili: "p i q tvore uzročni niz". Mi ćemo najviše rabiti prvo čitanje, ali često ćemo govoriti o *učincima*, misleći pritom na drugi član uzročnoga niza. Napominjemo kako učinke razlikujemo od *posljedica*. Potonji termin upotrebljavamo za logički, a prethodni za uzročni slijed. Vezano uz treće moguće čitanje iskaza $Cau(p, q)$, ono ponekad može voditi do dvosmislenosti: može se protumačiti i kao $Cau(q, p)$. Ipak, mi ćemo i dalje, poput Brouwera, govoriti o uzročnim nizovima.

Uzročne nizove $\mathcal{L}_{\text{LEC}^+}$ unekoliko pojednostavljuje prema obziru na Brouwerovu teoriju; u proširenoj logici izlaska svijesti razmatrat ćemo samo *dvočlane* uzročne nizove.

Nadalje, podiskaz p nazivat ćemo "uzročnim prednjakom" iskaza $Cau(p, q)$, a q "uzročnim posljetkom" uzročnoga iskaza $Cau(p, q)$.

Za razliku od jezika jednostavne logike izlaska svijesti, u proširenoj inačici uvodimo tri dodatna jednomjesna djelatelja: $\circ$, $\Box$ i $\Diamond$. Ti se djelatelji mogu definirati pomoću primitivnijih djelatelja. Prvi pomoću Cau, a ostala dva pomoću P. Detaljnije ćemo o svim djelateljima govoriti u potpoglavlju 3.3.3. Iskaz $\circ p$ čitamo: "subjekt očekuje p"; $\Box p$ čitamo: "p je nužno", a $\Diamond p$: "p je moguće".

Obrazložimo sada zašto u uzročne odnose u proširenoj logici izlaska svijesti mogu ulaziti samo potkonjunkcije nekoga svijeta $s_n \in B_n$. U jednostavnoj logici izlaska svijesti moguće svjetove tumačili smo kao vremenske nizove osjetā. Kako smo vidjeli iz Brouwerova opisa uzročne pozornost, uočavanjem nekih pravilnosti među vremenskim nizovima subjekt uspostavlja uzročne odnose. To svijest čini identifikacijom ili poistovjećivanjem, o čemu smo govorili u potpoglavljima 2.5 i 2.9. Pravilnosti koje se ponavljaju nisu ništa drugo nego dijelovi vremenskih nizova, odnosno konjunkti, *potkonjunkcije*, a moguće i čitav mogući svijet neke složenosti. Vjerujemo kako bi ustvrditi $Cau(p, q)$ za bilo koje iskaze p i q bilo, takoreći, fenomenološki neopravdano; dopuštalo bi, primjerice, iskaze oblika $Cau(Cau(p, r), q))$, ali i one oblika $Cau(p \wedge \neg p, q)$, legitimnost kojih ne nalazimo u teoriji izlaska svijesti. O tome više u potpoglavlju 3.3.3.

3.3.3 Model i istinitost uzročnih iskaza

Iznesimo ovdje još jednom Brouwerovu definiciju uzročnoga niza: " [i]terativna složevina osjeta, čiji elementi imaju invarijabilan poredak vremenske susljednosti, gdje, ako se pojavi jedan od njezinih elemenata, očekuje se da će se također pojaviti svi sljedeći (*following*) elementi, u pravilnome redoslijedu, zove se *uzročni niz*" [11, str. 480, kurziv u originalu]. U definiciji prepoznajemo pogodbu: *ako* se pojavi jedan od elemenata, pojavit će se i sljedeći elementi. Nadalje, sljedeći elementi slijede *u vremenskome* slijedu, oni se odvijaju *nakon* uzroka. Kako u LEC$^+$ razmatramo samo dvočlane uzročne nizove, govorimo samo o *jednome* susljednome ili sljedećem elementu uzročnoga niza.

Definirajmo sada model proširene logike izlaska svijesti za koji tražimo brouwerovski uvjet istinitosti uzročnih iskaza.

Definicija 56 (Model LEC$^+$)**.** $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}$ (definicija 33, str. 102).

Predlažemo sljedeći uvjet istinitosti nekoga uzročnoga iskaza:

1) $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n Cau(\bigwedge \pm\alpha_m \bigwedge \pm\alpha_{m'})$ akko za svaki $k \leq n:$ ako $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^{k-1} \bigwedge \pm\alpha_m$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^k \bigwedge \pm\alpha_{m'}$.

Radi preglednosti, umjesto $\bigwedge \pm\alpha_m$ i $\bigwedge \pm\alpha_{m'}$ koristit ćemo se metavarijablama p i q. Dakle, u nekome je trenutku istinito $Cau(p, q)$, kazuje prva inačica istinitosnoga uvjeta uzročnih iskaza, ako i samo ako beziznimno do toga trenutka, kada je u nekome trenutku istinito p, u sljedećem je trenutku istinito q.

Prisjetimo se da je model $\mathfrak{M}$ različit od modela logike LCG prema obziru na sastav mogućih svjetova. U LCG neki svemir B_n, kao skup mogućih svjetova složenosti n, skup je svih konjunkcija $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_n$. U proširenoj logici izlaska svijesti svaki je B_n dvostruko manjega kardinalnoga broja. Isto vrijedi i u modelu proširene logike izlaska svijesti; u obzir uzimamo samo one konjunkcije koje imaju pozitivan posljednji konjunkt: svemir B_n u $\mathfrak{M}^+$ skup je svih mogućih svjetova složenosti n, što predstavljamo konjunkcijama $\pm\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \pm\alpha_{n-1} \wedge \alpha_n$.

Uzmimo sada primjer nekoga modela $\mathfrak{M}^+$ s nekom poviješću φ^*, takve da:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}^+, \varphi^*(1) = \alpha_1\\
&\mathfrak{M}^+, \varphi^*(2) = \alpha_1 \wedge \alpha_2\\
&\mathfrak{M}^+, \varphi^*(3) = \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3\\
&\mathfrak{M}^+, \varphi^*(4) = \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4.
\end{aligned}$$

U skladu s Brouwerovom filozofijom, moguće svjetove, odnosno vrijednosti funkcije φ^* shvaćamo kao vremenske nizove ili lance jednostavnih osjeta. Pritom i nijekove poimamo kao osjete u pravome smislu; jednostavni osjeti odgovaraju skupu $ES^{\pm}$ iz definicije 23. Funkciji φ^* nismo nametnuli nikakva ograničenja. Odnosno, ona u svakome trenutku n može izabrati bilo koji od svjetova u nekome svemiru B_n. Važno je, naravno, da φ^* bira samo jedan mogući svijet. Ispitujući valjanost nekih uzročnih iskaza, spomenut ćemo neka svojstva povijestî. Postoje povijesti koje za svaki $n \in \mathbb{N}_{>0}$ biraju jedan s_n iz $\Delta, \Delta \subset B_n$; broj vrijednosti koje zauzimaju na neki način je *ograničen*.

U navedenome primjeru, obratimo pozornost na uzročni odnos iskaza α_1 i α_2. Također, razmotrimo samo posljednji, odnosno četvrti trenutak. Prema predloženoj definiciji istinitosti djelatelja Cau, vrijedi:

$$\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^4 Cau(\alpha_1, \alpha_2).$$

Napominjemo kako je u istinitosnome uvjetu korištena materijalna pogodba, koja je neistinita samo u jednome tumačenju. Iz toga razloga $\varphi^*(3)$ i $\varphi^*(4)$ ne čine protuprimjer uzročnosti, odnosno ne narušavaju pravilnost koju subjekt uočava u razvoju povijesti svijesti.

Iz gornjega primjera možemo iščitati i neke druge uzročne odnose. U četvrtome trenutku vrijedi i:

$$Cau(\alpha_1 \wedge \alpha_2, \alpha_3).$$

Nadalje, u $\mathfrak{M}^+, \varphi^*(4)$ istinit je α_1, koji je uzročni prednjak iskaza $Cau(\alpha_1, \alpha_2)$. Na temelju iskustva prošlih pravilnosti, a u skladu s Brouwerovom definicijom uzročnoga niza, možemo kazati da subjekt *očekuje* da će se u sljedećem, petome trenutku dogoditi α_2. Očekivana iskustva označavamo djelateljem $\circ$, gdje $\circ p$ čitamo: "subjekt očekuje da će se u sljedećem trenutku dogoditi p". Djelatelj uzročnoga očekivanja definiramo pomoću uzročnoga djelatelja i njegova prednjaka:

$$\circ p \leftrightarrow (Cau(q, p) \wedge q).$$

Kako su vrijednosti q i p u iskazu $Cau(q, p)$ ograničene na potkonjunkcije nekoga s_n, u iskazu $\circ p$ podiskaz p također je neka potkonjunkcija.

Definiravši djelatelj očekivanja, možemo usvrditi:

$$\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^4 \circ\alpha_2.$$

Definirajmo ovdje poluformalno nekoliko novih pojmova. Povijest φ^* u LEC$^+$ u petome trenutku može poprimiti ukupno $2^4 = 16$ mogućih vrijednost, dvostruko manje no neka (neograničena) povijest u LCG. Za te moguće svjetove kazat ćemo da su *ontički dostupni* svijetu $\mathfrak{M}^+, \varphi^*(4)$. Općenito, za bilo koja dva svijeta $s_n \in B_n$ i $s_{n+1} \in B_{n+1}$ vrijedi da je s_{n+1} ontički dostupan s, što ćemo bilježiti kao $R^O ss'$. Budući da su mogući svjetovi vrijednosti neke funkcije φ, možemo pisati i $R^O\varphi(n)\varphi(n+1)$.

Uz ontički dostupne, postoje svjetovi subjektu dostupni i na drukčiji način; svjetovi dostupni temeljem uzročnih iskustava ili uzročne pozornosti subjekta, odnosno *očekivani ili anticipirani svjetovi.* U slučaju povijesti svijesti φ^*, a na temelju istinitosti $\circ\alpha_2$ u trenutku 4, subjektu su u $\mathfrak{M}^+, \varphi^*(4)$ *anticipativno dostupni* samo oni svjetovi u kojima je istinito α_2. Temeljem tvorbe mogućih svjetova u LEC, koju preuzimamo i u LEC$^+$, lako je vidjeti kako se radi o ukupno 8 mogućih svjetova. Skup očekivanih svjetova u trenutku n označavat ćemo s A_n. Općenito, za bilo koji trenutak n i bilo koju povijest razvoja svijesti, vrijedi:

$$A_n \subseteq B_n.$$

Anticipativnu dostupnost svijeta s_{n+1} nekomu svijetu s_n označavat ćemo s $R^A s s_{n+1}$.

Uvedimo nakraju relaciju *činjenične dostupnosti*. Kao i u LCG, u LEC$^+$ neka funkcija povijesti svijesti iz svakoga svemira B_n odabire točno jedan aktualan svijet. Za bilo koji povijest φ i bilo koje $s_n \in B_n$ i $s_{n+1} \in B_{n+1}$ vrijedi:

ako $\varphi(n) = s_n$ i $\varphi(n+1) = s_{n+1}$, onda $R^\varphi s s_{n+1}$.

Prikažimo sada nastavak razvoja povijesti φ^*. Neka također vrijedi:

$$\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^5 \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5.$$

Peti trenutak razvoja svijesti donosi protuprimjer uzročnosti $Cau(\alpha_1, \alpha_2)$; u tome trenutku više nije istina da se α_2 pojavljuje u *svakome* trenutku nakon α_1. Stoga vrijedi sljedeće:

$$\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^5 \neg Cau(\alpha_1, \alpha_2).$$

Međutim, vrijedi i nešto drugo. Aktualan svijet u petome trenutku nije onaj kojega je subjekt očekivao temeljem svoje uzročne pozornosti. Brouwerovim riječima, subjekt nailazi na "otpor od strane objekta" [11, str. 481]. taj otpor, za koji možemo kazati da rezultira "razočaranjem" [11, str. 481], općenito možemo opisati ovim iskazom:

$$P \circ p \wedge \neg p.$$

Za svaku funkciju φ i trenutke n u kojima se ona razvija, objekt se opire subjektu ako i samo ako $\varphi(n) \notin A_n$.

S obzirom da zasad govorimo o neograničenim povijestima, u kojima φ može izabrati bilo koji svijet iz svakoga svemira B_n (gdje $|B_n| = 2^{n-1}$), možemo pretpostaviti da će nasumičnost sukcesivnih vrijednost φ često dovoditi do subjektova razočaranja. To neće biti slučaj s nekim drugim vrstama povijesti, primjerice s "čisto rastućim povijestima", o kojima ćemo uskoro govoriti.

Istražimo sada neka svojstva iskazā tvorenih pomoću djelatelja Cau te razmotrimo jesu li u skladu s Brouwerovom filozofijom. Kako nam Brouwer kazuje u svojoj disertaciji, "čovjeku je svojstveno [...] promatranje ponavljanjā nizova događaja u svijetu" [20, str. 53]. Možemo kazati kako subjekt "iterativne složevine osjetā" [11, str. 480] tvori od *iteriranih* složevina osjetā. Upravo na temelju *ponavljanjā* nekih "uzoraka" osjetā koje subjekt identificira ili poistovjećuje on tvori "uzročna očekivanja". No, što točno znači da se neki osjet ili složevina osjetā ponovila? To znači, smatramo, da se osjet ili složevina osjetā u pitanju jednom dogodila, potom prestala biti sadržajem svijest, da bi kasnije, i to najkasnije dva trenutka nakon što se izvorno pojavila, opet bila istinita, odnosno prisutna u svijesti.

Drugim riječima, ako se uzročni odnosi uspostavljaju među ponavljajućim osjetima, onda ti osjeti moraju jednom i prestati; za osjete koji su uvijek prisutni ne možemo kazati da se ponavljaju, barem ne u pravome smislu. Uzmimo kao primjer neku funkciju φ^* i neki iskaz α_n. Neka $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n \alpha_n$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{n+1} \alpha_n$. U nekome smislu možemo kazati da je u trenutku $n+1$ *ponovno* istina α_n. No, s motrišta svijesti koja doživljava susljedne trenutke n i $n+1$ s popratnim osjetima, ispravnije bi bilo kazati da osjet α_n *traje* dva trenutka.

Postoje iskazi koji su uvijek prisutni u svijesti subjekta; odnosno iskazi koji su istiniti u svakome mogućem svijetu. Radi se o valjanim iskazima. Prisjetimo se, radi što vjernijega oslikavanja izlaska svijesti, djelatelj C učinili smo prošlosnim djelateljem, kako bismo za svaki iskaz istinit u nekome mogućem svijetu mogli kazati da se može nalaziti u svijesti subjekta. Ipak, time nismo isključili fenomen "logičkoga sveznanja". U LEC i LEC$^+$ svijesti subjekta dostupne su sve semantičke posljedice danoga vremenskoga niza u nekome trenutku. Međutim, radi se o sveznanju samo o iskazima čije su sastavnice zaista doživljeni osjeti.

Zasad pretpostavljamo samo da sve što semantički slijedi u $\mathfrak{M}$, slijedi i u $\mathfrak{M}^+$. Posebnost je logike izlaska svijesti (koju smo preuzeli iz LCG) njezin rastući jezik, što se očituje i u semantici: prije trenutka n iskazi minimalne razine n ili veće nemaju istinitosnu vrijednost. Tako, primjerice, iskaz $\alpha_4 \vee \neg\alpha_4$ u trenutku 2 nema istinitosnu vrijednost; subjekt ne može smisleno govoriti o iskazima koji još nisu prisutni u njegovoj svijesti. To nije samo protuprimjer principu isključenja srednjega. Naime, u trenutku 2 ne vrijedi ni $\neg(\alpha_4 \wedge \neg\alpha_4)$. No, u četvrtome i svakome sljedećem trenutku oba su iskaza valjana.

Uzmimo kao primjer iskaz $\alpha_1 \vee \neg\alpha_1$, koji je valjan u svakome modelu $\mathfrak{M}^+$ s nekom povijesti φ. Taj je iskaz također istinit u svakome trenutku. To znači da, za bilo koji iskaz p, $\alpha_1 \vee \neg\alpha_1$ prethodi pojavku p u svijesti, ali i slijedi nakon p u svijesti. Odnosno, za bilo koji p, čini se kako slijedi $Cau(p, \alpha_1 \vee \neg\alpha_1)$, ali i $Cau(\neg(\alpha_1 \vee \neg\alpha_1), p)$. Podsjetimo još jednom kako uvjet istinitosti Cau uključuje materijalnu implikaciju, prisutnu i u Brouwerovoj definiciji uzročnoga niza. Navedeni iskazi tada bi bili istiniti zbog *izostanka protuprimjera*. Ovdje bi iskaz $\neg(\alpha_1 \vee \neg\alpha_1)$, uvijek odsutan iz svijesti subjekta bio uzrokom bilo čega. Kontradikcija bi, u jednome smislu, imala svu ili beskonačnu uzročnu moć. Slično, tautologija $\alpha_1 \vee \neg\alpha_1$ imala bi beskonačnu "posljedičnu moć", u smislu uzročne posljedice ili učinka; svaki iskaz uzrokuje tautologiju.

Međutim, naveli smo kako p i q u $Cau(p,q)$ i nekome n za neki model $\mathfrak{M}^+$ s povijesti φ mogu biti *samo potkonjunkcije* nekoga $s_n \in B_n$. Subjekt tvori uzročne lance samo od vremenskih lanaca, a tautologije i kontradikcije nikada nisu jednostavne sastavnice nekoga mogućega svijeta. Prema tome, iskazi $Cau(p, \alpha_1 \vee \neg\alpha_1)$ i $Cau(\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_1), p)$ u LEC$^+$ nisu čak ni ispravno tvoreni, tj. nisu u skladu s definicijom 55. U tome su smislu iskazi valjani u svakoj povijesti ili iskazi koji ustraju ili pak izostaju "u svakoj svijesti" *uzročno inertni*, oni ne ulaze u razmatranje pri tvorbi uzročnih nizova, jer nisu osjeti koji se ponavljaju, koji mijenjaju istinitosnu vrijednost.

Ipak, u LEC$^+$ postoje iskazi koji ustraju *u nekoj* svijesti. Takvi se iskazi nazivaju φ-valjanima; istinitima u svakom n većem ili jednakom od njihove minimalne razine, odnosno istinitima u svakome mogućem svijetu u kojem imaju istinitosnu vrijednost (definicija 37). Ta vrsta valjanosti nije rezervirana isključivo za logičke istine. Nadalje, φ-valjan iskaz može biti neka potkonjunkcija $\bigwedge \pm\alpha_m$, pa time i legitiman član uzročnoga niza.

Primjerice, neka je u modelu s povijesti φ' iskaz α_1 φ-valjan. Kako su α_1 i $\neg\alpha_1$ zaista potkonjunkcije nekih B_n, iskazi $Cau(p, \alpha_1)$ i $Cau(\neg\alpha_1, p)$, gdje je p neka potkonjunkcija B_n bit će ispravno tvoreni, ali i istiniti u svakome n prema definiciji istinitosti djelatelja Cau. Prema gore predloženoj definiciji istinitosti uzročnih iskaza, $Cau(\neg\alpha_1, p)$ istinito je u φ' sve dok se za neki n ne dogodi $\mathfrak{M}^+, \varphi' \nvDash^{n-1} \alpha_1$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi' \nvDash^{n} p$, no to neće nikada biti slučaj, budući da je α_1 φ-valjan. Primijetimo kako isto vrijedi i za $Cau(\neg\alpha_1, \neg p)$. Osjet koji se nikada nije dogodio uzrok je bilo kojoj potkonjunkciji nekoga mogućega svijeta; nijekove φ-valjanih iskaza možemo nazvati "općim uzrocima" (makar u strogome smislu ovi iskazi ne uzokuju *bilo što*, već samo bilo koju potkonjunkciju odgovarajuće razine iskaza). Dakle, u LEC$^+$ ostaje mogućnost uzročne djelotvornosti "φ-kontradikcija", iskaza koji nisu istiniti ni u kojem trenutku neke povijesti φ u modelu $\mathfrak{M}^+$.

Slično, $Cau(p, \alpha_1)$ istinito je u φ' sve dok se za neki n ne dogodi $\mathfrak{M}^+, \varphi' \vDash^{n-1} p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi' \nvDash^{n} \alpha_1$. Ponovno, to se neće nikada dogoditi, iz pretpostavke da je za φ' iskaz α_1 uvijek istinit. Jednako tako, istina je i $Cau(\neg p, \alpha_1)$. Stoga φ-valjane iskaze koji su ujedno i potkonjunkcije odgovarajućega s_n možemo nazvati "općim učincima".

U Brouwerovoj filozofiji uzročnosti, smatramo, nema mjesta kako općim uzrocima, tako ni općim učincima. Subjekt u izlasku svijesti uzročne odnose uspostavlja, kako smo naveli, između iteriranih ili opetovanih osjeta ili složevina osjetā. Prema našem shvaćanju ponavljanja, nepromijenjeni osjeti ne mogu se ponavljati. Stoga smatramo kako φ-valjane iskaze i φ-kontradikcije treba učiniti uzročno inertnima. Uzročna nedjelotvornost (protu-)valjanih iskaza slijedi iz gramatičkih pravila $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}^+}$; za φ-(protu-)valjane iskaze to ograničenje uvodimo na drukčiji način.

Iskaze koji nisu φ-valjani spoznavajućoj izlazećoj svijesti lako je definirati. To su oni iskazi koji za odgovarajuću povijest svijesti barem u jednome trenutku nisu istiniti. Opću uzročnost izbjegavamo zahtijevajući da, kako bi ustvrdio $Cau(p,q)$, subjekt barem jednom mora doživjeti p. Posljedično, ako se potkonjunkcija p barem jednom dogodila u nekoj povijesti, iskaz $\neg p$ ne može biti φ-valjan. Na analogan način izbjegavamo pojam "općega učinka". Kako bi uspostavio uzročni niz, subjekt barem jednom mora doživjeti izostanak uzročnoga posljetka; u $Cau(p,q)$ q ne smije biti φ-valjan.

Uzmimo kao primjer neku povijest svijesti $\varphi^\bullet$ i iskaz α_1. Neka je α_1 istinito u prvih 100 trenutaka, a u trenutku 101 neistina. Za svijest $\varphi^\bullet$ iskaz se α_1 u prvih 100 trenutaka ponaša kao φ-valjan iskaz. Tek nakon stotoga trenutka, vidjevši da je α_1 osjet podložan promjeni, svijest taj iskaz ili njegov nijek može uzeti kao član u nekome uzročnome nizu.

Uvedimo sada novu, snažniju definiciju istinitosti djelatelja Cau:

2) $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^n Cau(\bigwedge \pm\alpha_m \bigwedge \pm\alpha_{m'})$ akko za svaki $k \leq n:$ ako $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^{k-1} \bigwedge \pm\alpha_m$, onda $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^k \bigwedge \pm\alpha_j$ i postoji $i < n : \mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^i \bigwedge \pm\alpha_m$.

Radi preglednosti, pišimo i dalje $Cau(p,q)$, gdje su p i q neke potkonjunkcije. Prema novoj definiciji, za istinitost $Cau(p,q)$ u trenutku n nije dovoljan samo izostanak protuprimjera pogodbi "ako $\varphi \vDash^{k-1} p$, onda $\varphi \vDash^k q$", već se p mora *zaista* dogoditi u nekome trenutku prije n. Jasno je kako p ondje ne može biti nijek nekoga φ-valjanoga iskaza; iskazi neistiniti u svakome trenutku novom definicijom postaju uzročno inertni te ne postoji "opći uzrok".

Uočimo kako smo isključenjem pojma općega uzroka isključili i uz to vezan fenomen "prazne uzročnosti"; da bi ustvrdio $Cau(p,q)$, subjekt mora u nekome trenutku zaista doživjeti p, a u susljednome trenutku q, imati u dvama susljednima trenutcima kao sadržaj svijesti dva osjeta od kojih tvori uzročni niz. Prva inačica istinitosnoga uvjeta uzročnih iskaza dopušta da subjekt uspostavi neki uzročni odnos i bez "pozitivnoga primjera", već samo temeljem izostanka protuprimjera. Stroža definicija zahtijeva barem jedan pozitivan primjer, dok u ostalim susljednim trenutcima mora izostati protuprimjer.

Primijetimo također kako se prvi, opći konjunkt u drugoj definiciji odnosi na *sve* susljedne trenutke do nekoga n u kojem razmatramo neki uzročni iskaz. To se odnosi i na uzastopne trenutke prije pojave pozitivnoga primjera uzročnosti. U tome bismo smislu mogli govoriti o "potencijalnim uzročnim nizovima". To su oni nizovi koji u nekome trenutku nisu naišli na pozitivan primjer, ali ni na protuprimjer. Vratimo se primjeru povijesti $\varphi^\bullet$, u kojoj je α_1 istinito u prvih 100 trenutaka, a u trenutku 101 neistina.

Pretpostavimo dodatno da je u nekome trenutku $n < 100$ istinita neka prikladna potkonjunkcija svijeta $s_n \in B_n$, koju ćemo označiti s q, dok je u nekome trenutku $m \neq n$ i $m < 100$ slučaj $\neg q$. U $\varphi^\bullet(100)$ potencijalni su uzročni nizovi tada i $Cau(\neg\alpha_1, q)$, ali i $Cau(\neg\alpha_1, \neg q)$. U $\varphi^\bullet(101)$, međutim, istinito je $\neg\alpha_1$. Kako se u trenutku 102 mora dogoditi ili q ili $\neg q$, u $\varphi^\bullet(102)$ jedan će od dvaju potencijalnih uzročnih nizova naići na protuprimjer.

Drugi, stroži uvjet tvorbe uzročnih odnosa ipak je preširok; dopušta mogućnost da neki iskaz nepromijenjene istinitosne vrijednosti subjekt razmatra kao drugi član uzročnoga iskaza. Kako smo kazali, φ-valjani iskazi razine n susljedni su bilo kojem iskazu koji se javlja u trenutku $n-1$ ili kasnijem. Uzmimo ovdje kao primjer neku povijest φ^*. Neka je u toj povijest α_4 φ-valjan iskaz. Neka su n i m neki trenutci, takvi da $n \neq m, n > 4, m > 4$. Neka φ^* u n istinitom čini q, a u m $\neg q$, gdje je q neka potkonjunkcija svijeta s_n. Prema drugoj definiciji Cau, u $\varphi^*(l)$, gdje $l > m, l > n$ istinito je i $Cau(q, \alpha_4)$, kao i $Cau(\neg q, \alpha_4)$; iskaz α_4 je "opći učinak", što smo označili kao nepoželjan fenomen. Stoga treba isključiti mogućnost da iskazi koji "ustraju u svijesti" budu učinkom ičega. Završno, drugu inačicu uvjeta istinitosti Cau postrožujemo novim konjunktom, koji osigurava da je drugi argument uzročnoga iskaza barem jednom izostao iz svijesti:

3) $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^n Cau(\bigwedge \pm\alpha_m \bigwedge \pm\alpha_{m'})$ akko za svaki $k \leq n :$ ako $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^{k-1} \bigwedge \pm\alpha_m$, onda $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^k \bigwedge \pm\alpha_{m'}$ i postoji $i < n : \mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^i \bigwedge \pm\alpha_m$ i postoji $j \leq n : \mathfrak{M}^+\varphi \nvDash^j \bigwedge \pm\alpha_{m'}$.

Primijetimo ovdje kako je treća definicija suvisla samo ako trenutci k i l nisu susljedni, odnosno ako $k + 1 \neq l$. U protivnome bismo imali protuprimjer prvomu, općemu konjunktu.

Razmotrimo sada valjanost nekih uzročnih iskaza prema posljednjoj, trećoj inačici definicije istinitosti djelatelja Cau. Za različite potkonjunkcije nekoga svijeta u B_n koristimo se metavarijablama p, q i r.

I1) $(Cau(p, q) \wedge Cau(p, r)) \rightarrow Cau(p, q \wedge r)$

I2) $Cau(p, q \wedge r) \rightarrow (Cau(p, q) \wedge Cau(p, r))$

I3) $(Cau(p, q) \wedge Cau(r, q)) \rightarrow Cau(p \wedge r, q)$

Od navedenih, samo je prvi valjan u LEC$^+$, dok za ostala dva postoji protumodel, i to upravo zbog isključenja pojmova općega uzroka i općega učinka.

Dokažimo valjanost (I1). Pretpostavimo da postoji neka funkcija φ^* i model $\mathfrak{M}^+$, takvi da: (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n Cau(p,q)$, (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n Cau(p,r)$ i (3): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^n Cau(p, q \wedge r)$. Prema pretpostavci (3), istinit je barem jedan od sljedećih odnosa: (3.1): postoji neki trenutak $k \leq n$, za koji: $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{k-1} p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^k q \wedge r$ ili (3.2): ne postoji $i < n$, za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^j p$ ili (3.3): ne postoji $j \leq n$, za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^j q \wedge r$. Dokaz je *reductio ad absurdum*, dokazujemo kako ne može vrijediti ni jedna od navedih triju opcija. Dokazujemo najprije da ne vrijede (3.2) i (3.3). Iz (1) slijedi (1.1): postoji neki $l < n$, $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^l p$. (3.2) i (1.1) daju kontradikciju, pa (3.2) nije istinit. Iz (2) slijedi (2.1): postoji neki $m \leq n$, $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^m r$. (3.3) istovrijedno je (3.3'): za svaki $j \leq n$, $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^l q \wedge r$, čemu pak proturječi (2.1). Dakle, ni (3.3) ne vrijedi. Nadalje, iz (1) zaključujemo (1.2): za svaki trenutak $k \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{k-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^k q$; iz (2) izvodimo (2.2): za svaki trenutak $i \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{i-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^i r$. Iz (1.2) i (2.2) možemo zaključiti (4): za svaki $j \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{j-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^j q \wedge r$. (4) je istovrijedno (4'): ne postoji $j \leq n$, za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{j-1} p$, i $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^j q \wedge r$, što je s (3.1) čini protuslovlje. Dakle, iskaz $(Cau(p,q) \wedge Cau(p,r)) \rightarrow Cau(p, q \wedge r)$ je valjan.

Obrat (I1), iskaz (I2), nije valjan. Protumodel (I2) može, primjerice, biti onaj u kojem je za neku funkciju φ' iskaz r φ-valjan. Za neki n tada može vrijediti $\mathfrak{M}^+, \varphi' \vDash^n Cau(p, q \wedge r)$; važan je uvjet da je u nekom $m \leq n$ izostalo $q \wedge r$, ovdje na način da je izostao q, jer je r φ-valjan. No, ne vrijedi $Cau(p,r)$, jer r nikada nije izostao. Vidimo dakle da, iako pojedinačno nisu ničega učinak, φ-valjani iskazi mogu biti neki od konjunkata uzročnoga posljetka; uz uvjet da barem jedan od konjunkata nije φ-valjan.

Razmotrimo sada protumodel (I3). Neka $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^n (Cau(p,q) \wedge Cau(r,q))$. Tada može biti $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^n Cau(p \wedge r, q)$, ako je $\neg(p \wedge r)$ $\varphi^\bullet$-valjano. Naime, tada je u $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet$ barem jednom istina p, barem jednom r, ali to nikada nije u istome trenutku. Kako smo izbjegli mogućnost govora o općim uzrocima, $Cau(p \wedge r, q)$ ne može biti istina ako se nikada nije dogodilo $p \wedge r$, što je upravo slučaj s povijesti $\varphi^\bullet$.

Obrat iskaza (I3) ne razmatramo, budući da se radi o naoko kontingentnome iskazu. Iskazi (I1)-(I3) opisuju tvorbu jednoga uzročnoga niza od dvaju ili pak dvaju nizova od jednoga, rastavljajući i sastavljajući konjunkcije koje ulaze u uzročne odnose. Istinitost uzročnih iskaza očuvana je isključivo "sastavljanjem" dvaju uzročnih nizova jednakoga prednjaka, gdje novi uzročni niz ima složeniji uzročni posljedak.

Nadalje, sljedeći su iskazi kontingentni:

ire) $\neg Cau(p,p)$

asi) $Cau(p,q) \rightarrow \neg Cau(q,p)$

pri) $(Cau(p,q) \wedge Cau(q,r)) \rightarrow Cau(p,r)$.

Posljednji odgovara svojstvu prijelaznosti, za koje Brouwer tvrdi kako za uzročnost ne vrijedi općenito, kazavši: "svi uzročni nizovi pod utjecajem su netočnosti, pa ulančanjem uzročnih nizova ne moramo nužno tvoriti novi uzročni niz" [11, str. 481]. Drugim riječima, imamo li dva niza, takvih da prvi niz završava jednakim elementom kojim drugi započinje [71, str. 21], ne možemo ih uvijek spojiti u jedinstven uzročni niz. Prva dva ne-teorema predstavljaju svojstva irefleksivnosti i asimetričnosti.

Načinimo najprije protumodel prijelaznosti. Neka $\mathfrak{M}^+, \varphi' \vDash^n Cau(p,q) \wedge Cau(q,r)$ i $\mathfrak{M}^+\varphi' \nvDash^n Cau(p,r)$. Uzmimo neki trenutak m, takav da $\mathfrak{M}^+, \varphi' \vDash^m p \wedge \neg q \wedge Cau(p,q) \wedge Cau(q,r) \wedge Cau(p,r)$ i susljedni trenutak, za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi' \vDash^{m+1} q \wedge \neg r \wedge Cau(p,q) \wedge Cau(q,r)$. Od m do $m+1$ dogodio se protuprimjer uzročnomu iskazu $Cau(p,r)$, ali ne i drugim uzročnim iskazima, pa u $\mathfrak{M}^+, \varphi' \nvDash^{m+1} (Cau(p,q) \wedge Cau(q,r)) \rightarrow Cau(p,r)$.

Protumodeli za irefleksivnost i asimetričnost nešto su restriktivniji. Istražimo najprije što znači pretpostaviti da $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \vDash^n Cau(p,p)$. Tada vrijede tri uvjeta: postoji neki $i < n, \mathfrak{M}, \varphi'' \vDash^i p$, postoji neki $j \leq n, \mathfrak{M}, \varphi'' \nvDash^j p$ i za svaki $k \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \vDash^{k-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \vDash^k p$. Treći uvjet nam kazuje da, jednom kada se dogodi p, on će se uvijek dogoditi i u sljedećem trenutku. Prvi uvjet kazuje nam da se p jednom zaista dogodio. Drugi uvjet tada može biti istinit samo ako se trenutak u kojem je p izostalo pojavio prije trenutka u kojem se dogodio p, odnosno ako $l < k$. Dakle, protumodel irefleksivnosti model je u kojem se samouzrokujuća potkonjunkcija, u trenutku u kojem ima istinitosnu vrijednost u svijesti javlja kao lišidba, a čim u nekome trenutku biva istinitom, takvom ostaje u svim sljedećim trenutcima.

Primijetimo kako samouzrokovanje ne vrijedi za atomarne iskaze, i to prema definiciji mogućih svjetova osjetā (definicija 26). Konjunkti koji predstavljaju nove elemetarne osjete po prvi se put javljaju isključivo pozitivno. Primjerice, za p u $Cau(p,p)$ možemo uzeti $\alpha_2 \wedge \alpha_3$; a za trenutak l vrijednost 3. Tada možemo imati: $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \nvDash^3 \alpha_2 \wedge \alpha_3$.

U protumodelu irefleksivnosti uzročnih iskaza, odnosno modelu refleksivnosti uzročnosti neke potkonjunkcije, samouzrokujući iskaz p ustraje u svijesti, no ne od samoga trenutka u kojem je mogao imati istinitosnu vrijednost, što je karakteristika φ-valjanih iskaza, već najranije od trenutka $n = lv(p)+1$. Takva "oslabljena φ-valjanost" karakteristika je jedne od vrsta povijesti navedenih u [86, str. 84]; radi se o p-n povijestima.

Definicija 57 (p-n povijest)**.** *Za svaki iskaz p i svaki $n \geq lv(p)$: φ je p-n povijest akko za svaki $m \geq n$ u nekome modelu, $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^m p$.*

Tu vrstu povijestî definiramo za neki model $\mathfrak{M}$, jer o njima možemo govoriti i u jednostavnoj logici izlaska svijesti.

Može se činiti neobičnim što predložena definicija istinitosti djelatelja Cau dopušta refleksivnost uzročnosti ili samouzrokovanje. To ipak ne smatramo problematičnim. Prije svega, kažimo da, prema našem saznanju, Brouwer ne govori o svojstvima refleksivnosti i simetričnosti uzročnosti. Niječe samo prijelaznost, koju naziva "ulančanjem" [11, str. 481]. Budući da uzročni nizovi nastaju razmatranjem prošlih uzoraka, ne vidimo razloga da *a priori* pretpostavimo bilo irefleksivnost, bilo asimetričnost uzročnosti. Nadalje, činjenicu da postoje protumodeli irefleksivnosti i asimetričnosti ne smatramo problematičnom i zbog "problematičnosti" samih tih protumodela. Naime, iako postoji neka povijest u kojoj je istinito $Cau(p,p)$, to je posve specifična povijest, u smislu da je iskaz, od trenutka kada uzrokuje sam sebe, uvijek prisutan u svijesti. Smatramo kako je mogući prigovor bolje usmjeriti na samu povijest koja dopušta $Cau(p,p)$, a ne na fenomen samouzrokovanja.

Razmotrimo sada protuprimjer asimetričnosti. Neka u modelu $\mathfrak{M}^+$ s funkcijom φ''', $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^n Cau(p,q) \wedge Cau(q,p)$. Dakle, (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^n Cau(p,q)$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^n Cau(q,p)$. Iz (1) slijedi: (1.1): za svaki $m \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{m-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^m q$. Iz (1) također slijedi (1.2): postoji neki $k < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^k p$ i (1.3): postoji neki $l \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \nvDash^l q$. Iz (2) slijedi: (2.1): za svaki $m', m' \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{m'-1} q$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{m'} p$, (2.2): postoji neki $k', k' < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{k'} q$ i (2.3): postoji neki $l', l' \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \nvDash^{l'} p$. Iz (1.1) i (1.2) možemo zaključiti (3): postoji neki $k < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{k+1} q$. Iz (2.1) i (3) slijedi (4): postoji neki $k < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{k+2} p$. iz (1.1) i (4) tada slijedi (5): postoji neki $k < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{k+3} q$. I tako dalje. Imamo model u kojem se p i q javljaju u svakome drugome trenutku. No, ne smijemo zaboraviti da vrijede (1.3) i (2.3), koji nam kazuju da p i q barem jednom do trenutka n moraju izostati. Jedan protumodel asimetričnosti koji zadovoljava te uvjete jest model u kojem vrijedi $k = l, k' = l', k' = 1 - k$. U takvome modelu vrijedi: za svaki trenutak i, $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^i q \wedge \neg p$, gdje $i = 2n - 1$; i svaki trenutak j, $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^j p \wedge \neg q$, gdje $j = 2n$.

U našem protumodelu asimetričnosti p i q svakim novim trenutkom mijenjaju svoju istinitosnu vrijednost, uz dodatan uvjet da ni u kojem trenutku povijesti nemaju istu istinitosnu vrijednost. Stoga ga možemo definirati i kao model u koje vrijedi: za svaki n, $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^n (p \leftrightarrow \neg q) \wedge Cp \wedge Cq$. Povijesti u kojima za neki p uvijek vrijedi Cp također spadaju u istaknute vrste povijestî u [86]. Za razliku od čisto rastućih (koje ćemo predstaviti definicijom 59) i p-n povijesti, koje opisuju neku vrstu nepromjenljivosti, u nekim pak povijestima iskazi svakim susljednim trenutkom mijenjaju svoju vrijednost.

Značajan su primjer "atomarno promjenljive povijesti" (*basically jumping histories*) [86, str. 88].

Definicija 58 (Atomarno promjenljiva povijest). *φ je atomarno promjenljiva povijest akko za svaki k i svaki n, $1 < k \leq n$, u nekome modelu, $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n C\alpha_k$.*

Premda svi atomarni iskazi mogu svakim susljednim trenutkom mijenjati svoju istinitosnu vrijednost, ne postoji povijest u kojem *svaki* iskaz mijenja svoju istinitosnu vrijednosti iz n u $n+1$. Prije svega, tautologije su istinite u svakome trenutku u svakome modelu i u svakoj povijesti. No, ne postoji ni povijest u kojoj bi svi *kontingentni* iskazi svakim novim trenutkom mijenjali svoju istinitosnu vrijednost. Takve bi se povijesti nazivale "potpuno promjenljivim povijestima" (*fully jumping histories*) [86, str. 89]; u njima za svaki p vrijedi Cp. Nemogućnost izgradnje modela za potpuno rastuće povijesti dokazana je u [86, str. 88–89], ali i u [88, str. 129], gdje je povijest u kojoj se sve neprestance mijenja uspoređena s Heraklitovom filozofijom.

U našem protumodelu asimetričnosti, $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^n (p \leftrightarrow \neg q) \wedge Cp \wedge Cq$ uzmimo sada za p atomaran iskaz α_2, a za q atomaran α_7. Dodatno, pretpostavimo da je φ''' atomarno promjenljiva povijest. U tome modelu, u drugom odnosno sedmome trenutku ili većem, vrijedi $C\alpha_2$ i $C\alpha_7$. Nadalje, od sedmoga je trenutka nadalje istina $\alpha_2 \leftrightarrow \neg\alpha_7$. Isto tako, prema definiciji 24, za svaki trenutak n: $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^n \alpha_n$. Iz toga slijedi da, za svaki n: $\mathfrak{M}^+, \varphi''' \vDash^{2n} \alpha_{2n}$; atomarni iskazi s parnim pokazateljima pojavljuju se u parnim trenutcima. Kako vrijedi $C\alpha_n$, vrijedi i $C\alpha_{2n}$. Imamo, dakle, povijest u kojoj su atomarni iskazi s parnim pokazateljima istiniti u parnim trenutcima, a neistiniti u neparnim trenutcima, dok su atomarni iskazi s neparnim pokazateljima istiniti u neparnim, a neistiniti u parnim trenutcima. Tim više, uzajaman uzročni odnos u atomarno promjenjivim povijestima vrijedi između svakih dvaju atomarnih iskaza među kojima jedan ima paran, a drugi neparan pokazatelj.

Definirajmo sada i čisto rastuću povijest [86, str. 81]:

Definicija 59 (Čisto rastuća povijest). *φ je čisto rastuća povijest akko za svaki p i svaki $n > 1$, u nekome modelu $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n \neg Cp$.*

Spomenimo ovdje još jednu, prema našem mišljenju značajnu, razliku između LCG i logika izlaska svijesti. Naime, u LCG može postojati više čisto rastućih i atomarno promjenljivih povijesti, dok u LEC i LEC$^+$, zbog razlike između definicija 6 i 24, postoji samo jedna čisto rastuća i jedna atomarno promjenljiva povijest.

U čisto rastućim povijestima, sve što je istina u trenutku n, istina je i u susljednome trenutku. U LEC i LEC$^+$, za svaki model $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^+$ i svaku funkciju φ vrijedi: $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n \alpha_n$.

Dakle, za svaki atomaran iskaz α_n vrijedi da je istinit i u trenutku $n+1$. U logikama izlaska svijesti čisto rastuća povijest je ona koja u svakome trenutku istinitima čini sve atomarne iskaze α_n. Budući da ni u kojem trenutku za neki α_m ne vrijedi $\neg\alpha_m$, tu povijest možemo nazvati i "osnovno pozitivnom poviješću".

S druge strane, u atomarno promjenjivim povijestima istinitosna vrijednost svakoga atomaranoga iskaza mijenja se svakim novim trenutkom. No, kada govorimo o mogućim svjetovima *osjetā*, ponovno, u obzir moramo uzeti da $\mathfrak{M}, \varphi \vDash^n \alpha_n$. Pod pretpostavkom skakanja vrijednosti atomarnih iskaza, možemo vidjeti kako slijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^{n+1} \alpha_n$. Samo je jedna povijest koja zadovoljava taj uvjet. Prikažimo je ovdje:

Prikaz 7 (Atomarno promjenljiva povijest).

$$\alpha_1 \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \Longrightarrow \alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \alpha_3 \Longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \alpha_4 \Longrightarrow \ldots$$

Vratimo se sada istinitim uzročnim iskazima. Valjani su također i neki iskazi koji govore o odnosu uzročnoga djelatelja prema djelateljima promjene i neposredne prošlosti. Nadalje, u logikama izlaska svijesti možemo govoriti i o daljoj prošlosti, jednostavno nizajući pojavke djelatelja P ispred nekoga iskaza. Radi preglednosti, rabimo $P^n p$ za n pojavaka djelatelja P ispred p. Također, vrijedi $P^0 p \leftrightarrow p$. Možemo kazati kako nizanjem djelatelja P oslikavamo pamćenje ili memoriju subjekta, koju Brouwer spominje u definiciji dvojstva u [28, str. 45] i [26, str. 418]. Pamćenje subjekta može sezati sve do prvoga trenutka; naravno, ne i dalje. Stoga slijedi da, ustvrdimo li za neke n i m: $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n P^m p$, broj m mora biti strogo manji od broja n.

Uvedimo sada jednu definiciju, koju smo možda dali naslutiti definicijom jezika LEC$^+$. Umjesto $P^n p$ pisat ćemo $\Diamond p$. Potonji iskaz, kako smo prethodno kazali, možemo čitati na uobičajen način: "moguće je da p". U proširenoj logici izlaska svijesti kazati da je neki iskaz p moguć u trenutku m znači kazati da se p dogodio u nekome trenutku prije m ili pak u samome trenutku m, budući da n u $P^n p$ može imati vrijednost 0. Dakle, vrijedi

$$P^0 p \leftrightarrow p$$
$$P^n \leftrightarrow PP^{n-1}, \text{ gdje } n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$
$$P^n \leftrightarrow \Diamond p$$
$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p.$$

Iskaz $\Box p$ možemo čitati na standardan način: "nužno je da p". U LEC$^+$ to znači da se p dogodio u *svakome* prošlome trenutku. Ako za neki model proširene logike izlaska svijesti s pripadajućom povijesti u nekome trenutku n ustvrdimo $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Box p$, ono što smo ustvrdili zapravo je $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n P^0 p \wedge P^1 p \wedge \ldots \wedge P^{n-1} p$.

Sada možemo nastaviti razmatrati valjanost nekih uzročnih iskaza. Valjani su iskazi oblika:

I4) $Cau(p,q) \to (Pp \to q)$

I5) $Cau(p,q) \to (\neg q \to P\neg p)$

I6) $Cau(p,q) \to (\Diamond Cp \land \Diamond Cq)$.

Iskazi (I4) i (I5) sintaktički su istovrijedni, što ćemo dokazati u potpoglavlju 65. Dokažimo stoga samo valjanost iskaza (I4). Pretpostavimo da u nekome modelu $\mathfrak{M}^+$ s funkcijom φ^* vrijedi (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n Cau(p,q) \land Pp$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^n q$. Iz (1) slijedi (1.1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n Cau(p,q)$. Iz (1.1) slijedi (1.1.1): za svaki $k \leq n$, ako $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{k-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^k q$. Iz (1) slijedi (1.2): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n Pp$. Iz (1.2) slijedi (1.2.1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^{n-1} p$. Iz (1.1.1) i (1.2.1) slijedi (1.3): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n q$, što protuslovi pretpostavci (2). Dakle, iskaz (I4) je valjan.

Iskaz (I6) smatramo posebno važnim u našem formalizmu. Naime, tim iskazom izražena je promjenljivost iskazā koji ulaze u uzročne odnose. Uvevši djelatelje $\Box$ i $\Diamond$, sada i u predmetnome jeziku možemo govoriti o φ-valjanim iskazima (definicija 12), iskazima koji ne mijenjaju istinitosnu vrijednost. Tražeći prikladnu definiciju djelatelja Cau, u posljednjoj smo inačici definicije naveli kako uzročni posljedak ne smije biti uvijek istinit. Stoga je, barem na prvi pogled, jasno kako je u $Cau(p,q)$ potkonjunkcija q podložna promjeni ($\Diamond Cq$). No, Brouwer ne govori o "uzročnim posljetcima" kao iteriranima i iterativnima, već takvima smatra sve članove uzročnoga niza. U uzročne odnose ulaze svi ponovljivi nizovi fenomena [20, str. 53]. Stoga i uzročni prednjak p također mora biti promjenljiv, što možda na prvi pogled nije vidljivo iz konačne inačice istinitosnoga uvjeta djelatelja Cau.

Dokažimo valjanost (I6). Pretpostavimo (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n Cau(p,q)$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^n \Diamond Cp \land \Diamond Cq$. Prema drugoj pretpostavci, vrijedi barem jedan od sljedećih odnosa: (2.1): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \neg\Diamond Cp$ ili (2.2): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \neg\Diamond Cq$. Pretpostavimo (2.1). (2.1) istovrijedno je (2.1'): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Box\neg Cp$. (2.1') pokrata je za (2.1"): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n P^0\neg Cp \land \ldots \land P^{n-1}\neg Cp$. Dakle, stavak (2.1) kazuje nam da iskaz p ni u kojem trenutku prije n, ali ni u samome n, nije promijenio istinitosnu vrijednost. Iz vrijedeće pretpostavke (1) zaključimo sada (1.1): postoji neki trenutak $i < n$, takav da: $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^i p$. Iz (2.1) i (1.1) slijedi (3): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Box p$. Iz (1) također slijede (1.2): postoji neki trenutak $j \leq n$, takav da: $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^j q$ i (1.3): za svaki trenutak $k \leq n$: ako $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^{k-1} p$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^k q$. Protupostav (1.3) stavak je (1.3'): za svaki trenutak $k \leq n$: ako $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^k q$, onda $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^{k-1} p$. Sada iz (1.2) i (1.3') izvodimo (4): postoji neki trenutak $k \leq n$ takav da: $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^{k-1} \neg p$. Stavak (4) i stavak (3) čine proturječje. Stoga odbacujemo pretpostavku (2.1). Pretpostavimo sada (2.2). Ta je postavka jednakovrijedna (2.2'): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Box\neg Cq$. Kako vrijede pretpostavke (1.1) i (1.3), možemo izvesti (5): postoji neki trenutak $k \leq n$ takav da: $\mathfrak{M}^+\varphi \vDash^k q$. Iz (2.2') i (5) izvodimo (6): $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Box q$. No, i dalje vrijedi (1.2): postoji neki trenutak $j \leq n$, takav da: $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^j \neg q$, što protuslovi (6). Odbacujemo, dakle, i pretpostavku (2.2). Iskaz (I6) je valjan.

3.3.4 Istinitost u LEC$^+$

Iznosimo sada pregledno definiciju istinitosti u proširenoj logici izlaska svijesti. Radi se o proširenju definicije 34. Također, o istinitosti iskaza s djelateljima $\Box$ i $\Diamond$ govorili smo u okviru primitivnijega djelatelja P, prisutnoga već u jednostavnoj logici izlaska svijesti. Istinitost uzročnoga djelatelja odgovara trećoj inačici istinitosnoga uvjeta Cau iz prethodnoga potpoglavlja.

Definicija 60 (Istinitost u $\mathfrak{M}^+$)**.**
Za svaki atomaran iskaz $\alpha_k, 1 \leq k \leq n$:

1. *$\varphi \vDash^n \alpha_k$ akko se osjetilno stanje predstavljeno iskazom α_k pojavljuje bez znaka nijeka u konjunkciji $\varphi(n)$ koja označava neki mogući svijet osjetā (definicija 24, stranica 99).*

Ako su p i q iskazi minimalnih razina manjih ili jednakih n, onda:

2. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \neg p$ akko $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^n p$*
3. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p \wedge q$ akko $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n q$*
4. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p \vee q$ akko $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p$ ili $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n q$*
5. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p \rightarrow q$ akko $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n q$*
6. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p \leftrightarrow q$ akko ($\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^n p$ ili $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n q$) i ($\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p$ ili $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^n q$)*
7. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n Cp$ akko ($\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^{n-1} p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^n p$) ili ($\mathfrak{M}^+, \varphi \nvDash^{n-1} p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n p$)*
8. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n Pp$ akko $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^{n-1} p$*
9. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Box p$ akko za svaki $m \leq n$: $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^m p$*
10. *$\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^n \Diamond p$ akko postoji neki $k \leq n$ takav da $\mathfrak{M}^+, \varphi \vDash^k p$.*

Za neki $\pm\alpha_k$, gdje $k \leq n$:

11. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n E \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in EA$

12. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n R \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in RA$

13. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n A \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in AA_n$

14. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n D \pm \alpha_k$ *akko* $\pm\alpha_k \in DA_n$.

Ako je p_1 iskaz minimalne razine $k-1$, gdje $k \leq n$, onda:

15. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n G^+ p_1$ *akko* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n p_1$ *i* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n \alpha_k$

16. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n G^- p_1$ *akko* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n p_1$ *i* $\mathfrak{M}^+, \varphi \not\models^n \alpha_k$.

Ako su s i t neke potkonjunkcije minimalnih razina manjih ili jednakih n, onda:

17. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n Cau(s,t)$ *akko za svaki $k \leq n$: ako* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^{k-1} s$, *onda* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^k t$ *i postoji $i < n$ takav da* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^i s$ *i postoji $j \leq n$ takav da* $\mathfrak{M}^+, \varphi \not\models^j t$

18. $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n \circ t$ *akko postoji neki s takav da* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n Cau(s,t)$ *i* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n s$.

Ako $n < lv(p)$:

19. $\mathfrak{M}, \varphi \models^n p$ *je nedefinirano.*

Definirajmo sada semantički pojmove zadovoljivosti i semantičke posljedičnosti za proširenu logiku izlaska svijesti.

Definicija 61 (Zadovoljivost skupa iskazā u $\mathfrak{M}^+$). *Skup iskaza Γ logike LEC$^+$ zadovoljiv je akko postoji neki model $\mathfrak{M}^+$ s funkcijom φ takvom da za neki $n \geq 1$ funkcija φ u n istinitima čini sve članove skupa Γ. Taj odnos označavamo ovako:* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n_{LEC} \Gamma$.

Definicija 62 (Semantička posljedičnost u $\mathfrak{M}^+$). *Iskaz p je sematička posljedica skupa iskazā Γ akko, ako* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n_{LEC^+} \Gamma$, *onda* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^n_{LEC^+} p$. *Taj odnos kraće označavamo ovako:* $\Gamma \models_{LEC^+} p$.

Definicija 63 (φ-valjanost u $\mathfrak{M}^+$). *Za svaki iskaz $p, lv(p) = n$: p je φ-valjano akko* $\mathfrak{M}^+, \varphi \models^k p$ *za svaki $k \geq n$.*

Definicija 64 (Valjanost u $\mathfrak{M}^+$). *Za svaki iskaz p: p je valjano akko p je φ-valjano u svakome $\mathfrak{M}^+$.*

Istražimo sada valjanost iskaza s modalnostima $\Box$ i $\Diamond$. Prema definiciji 60 valjani su sljedeći iskazi:

K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

T) $\Box p \to p$

4) $\Box p \to \Box\Box p$

D1) $\Box(\Box p \to q) \lor \Box(\Box q \to p)$.

Dokažimo valjanost (K). Pretpostavimo da u nekome modelu $\mathfrak{M}^+$ s funkcijom φ^* vrijedi: (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^n \Box(p \to q)$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \not\models^n (\Box p \to \Box q)$. Potonja je postavka jednakovrijedna postavci (2'): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^n \Box p \land \Diamond\neg q)$. Iz (2') slijedi: (2.1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^n \Box p$, što zajedno s (1) daje (3): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^n \Box q$. No, iz (2') slijedi i (2.2): $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \models^n \Diamond\neg q$, što s (3) čini protuslovlje. Dakle, iskaz (K) valjan je u LEC$^+$.

Valjanost (T) dokazujemo pretpostavivši (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \models^n \Box p$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \not\models^n p$, tj. (2'): $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \models^n \neg p$. Iz (1) slijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \models^n p$, što protuslovi drugoj pretpostavci.

Dokažimo valjanost (4). Pretpostavimo (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi' \models^n \Box p$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi' \not\models^n \Box\Box p$. Ponovno, drugu postavku preoblikujemo u (2'): $\mathfrak{M}^+, \varphi' \models^n \Diamond\Diamond\neg p$. Iz (2) ili (2') slijedi (3): postoji neki $k \leq n$ takav da $\mathfrak{M}^+, \varphi' \models^k \Diamond\neg p$. Iz (3) slijedi (4): postoji neki $l \leq k$ takav da $\mathfrak{M}^+, \varphi' \models^l \neg p$. Postavke (4) i (1) vode do kontradikcije. Dakle, iskaz (4) valjan je proširenoj logici izlaska svijesti.

Nakraju, dokažimo valjanost (D1). Pretpostavimo (1): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n \neg\Box(\Box p \to q)$ i (2): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n \neg\Box(\Box q \to p)$. Pretpostavka (1) ekvivalentna je (1'): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n \Diamond\neg(\Box p \to q)$, što je pak ekvivalentno (1"): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n \Diamond(\Box p \land \neg q)$. Slično, iz (2) izvodimo njoj semantički istovrijednu postavku (2"): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n \Diamond(\Box q \land \neg p)$. Za neke $i, j \geq 0$, sada možemo izvesti (1"): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n P^i(\Box p \land \neg q)$ i u (2"'): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^n P^j(\Box q \land \neg p)$. Potonje dvije postavke kazuju nam kako je u trenutku n istina da je jednom (prije i trenutaka) istinit bio iskaz u $\Box p \land \neg q)$ te je istina da je jednom (prije j trenutaka) istinit bio iskaz $\Box q \land \neg p$. Postoje, dakle, tri mogućnosti: ili $i = j$, ili $i > j$, ili $i < j$. Pretpostavimo da $i = j$. Tada (3): Postoji neki $k \leq n$, za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^k (\Box p \land \neg q) \land (\Box q \land \neg p)$. Postavka (4) je proturječna, stoga $\neg i = j$. Pretpostavimo sada $i > j$. Tada, za neke k i l, takve da $k < l$, vrijedi (4): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^k \Box p \land \neg q$ i (5): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^l \Box q \land \neg p$. Iz (5) izvodimo (5.1): za svaki $m \leq l$: $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^m q$, što proturječi postavci (4), prema kojoj je q izostao u nekom trenutku prije l. Nakraju, pretpostavimo $i < j$. Tada, za neke k i l, takve da $k > l$, vrijedi (6): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^k \Box p \land \neg q$ i (7): $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \models^l \Box q \land \neg p$. Iz (6) izvodimo (6.1): za svaki

$m \leq k$: $\mathfrak{M}^+, \varphi'' \vDash^m p$, što proturječi postavci (7). Budući da nijedna od triju mogućnosti ne vrijedi, iskaz (D1) je valjan.

3.3.5 Sustav LEC$^+$

Sustav proširene logike izlaska svijest proširenje je sustava jednostavne logike izlaska svijesti.

Definicija 65 (Sustav LEC$^+$).
Svako pravilo zaključivanja iz definicije 39 (str. 104) i sljedeće pravilo:

(u $\Box$) *uvođenje djelatelja $\Box$ (necesitacija): ako $\vdash p$, onda $\vdash \Box p$*

Svaka aksiomatska shema iz definicije 39 te sljedeće aksiomatske sheme:

Ax14) $(Cau(p,q) \wedge Cau(p,r)) \rightarrow Cau(p, q \wedge p)$

Ax15) $Cau(p,q) \rightarrow (P^j p \rightarrow P^{j-1} q)$, *za svaki* $j \geq 0$

Ax16) $Cau(p,q) \rightarrow (\Diamond Cp \wedge \Diamond Cq)$

Ax17) $\Diamond p \leftrightarrow P^i p$, *za neki* $i \geq 0$

Ax18) $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$

Ax19) $\circ q \leftrightarrow (Cau(p,q) \wedge p)$

Ax20) $(\Box(Pp \rightarrow q) \wedge \Diamond p \wedge \Diamond \neg q) \rightarrow Cau(p,q)$

K) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

T) $\Box p \rightarrow p$

4) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

D1) $\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$.

Dokažljivost iskaza p iz skupa iskaza Γ u sustavu LEC$^+$ *bilježimo ovako: "$\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}^+} p$".*

Dokažimo sada sintaktičku istovrijednost iskaza I4 i I5 (str. 136). Izvodimo dokaz samo slijeva nadesno, obrat se dokazuje analogno.

1)	$\{Cau(p,q) \to (Pp \to q), Cau(p,q), \neg q\} \vdash Pp \to q$	(i $\to$)
2)	$\{Cau(p,q) \to (Pp \to q), Cau(p,q), \neg q\} \vdash \neg Pp$	(1: CPC)
3)	$\{Cau(p,q) \to (Pp \to q), Cau(p,q), \neg q\} \vdash P\neg p$	(1, Th3, str. 109: Rep)
4)	$\{Cau(p,q) \to (Pp \to q), Cau(p,q)\} \vdash \neg q \to P\neg p$	(3: u $\to$)
5)	$\{Cau(p,q) \to (Pp \to q)\} \vdash Cau(p,q) \to (\neg q \to P\neg p)$	(4: u $\to$)

3.3.6 Pouzdanost sustava LEC$^+$

Ovdje dokazujemo poučak pouzdanosti sustava proširene logike izlaska svijesti.

Poučak 5 (Pouzdanost sustava LEC$^+$)**.** *Ako* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}^+} p$*, onda* $\Gamma \vDash_{\mathrm{LEC}^+} p$*.*

Dokaz. Nadovezujemo se na dokaz poučka 3. Potrebno je samo dokazati valjanost dodatnih aksiomatskih shema karakterističnih za sustav LEC$^+$. Valjanost aksiomatskih shema 14-16 iz definicije 65 dokazali smo na stranicama 131 i 136, s time da smo za Ax15 dokaz izveli samo za $j = 1$. Dokaz se za druge slučaje izvodi analogno. Valjanost aksiomatskih shema K, T i 4 dokazali smo na stranici 139.

Dokažimo ovdje valjanost Ax17 iz definicije 65. Pretpostavimo $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^n \Diamond p \leftrightarrow P^i p$, za neki $i < n$. Tada: ili $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n \Diamond p$ i ne postoji $i < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n P^i p$, ili za neki $i < n$ vrijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n P^i p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^n \Diamond p$. Neka $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n \Diamond p$ i ne postoji $i < n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n P^i p$. Prema točki 10 definicije 60, slijedi kako postoji neki $k \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^k p$. Iz toga slijedi da za neki $i = n - k$, vrijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n P^i k$. Imamo protuslovlje. Sada pretpostavljamo da za neki $i < n$ vrijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^n P^i p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^n \Diamond p$. Prema drugome konjunktu pretpostavke i točki 10 definicije 60 slijedi kako ne postoji $k \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^k p$. To znači da za svaki $k \leq n$: $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \nvDash^k p$. No, prema prvome konjunktu pretpostavke, postoji neki trenutak $k = n - i$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^* \vDash^k p$. Ponovno imamo protuslovlje. Aksiomatska shema 17 sustava LEC$^+$ je valjana.

Potrebno je sada dokazati valjanost iskazā oblika Ax18: $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$. Dokaz je *reductio*; pretpostavljamo najprije $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^n \Box p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^n \neg\Diamond\neg p$. Iz drugoga konjunkta izvodimo $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^n \Diamond\neg p$, iz čega pomoću točke 10 definicije 60 slijedi kako postoji neki $k \leq n$ takav da $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^k \neg p$, tj. postoji neki $k \leq n$ takav da $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^k p$. No, iz prvoga konjunkta pretpostavke pomoću točke 9 definicije 60 vrijedi kako za svaki $m \leq n$: $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^m p$. Imamo protuslovlje. Sada pretpostavimo $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^n \neg\Diamond\neg p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^n \Box p$. Prema drugome konjunktu pretpostavke, postoji neki $m \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^m p$. Prema prvome konjunktu pretpostavke, $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^n \Diamond\neg p$. To zajedno s točkom 10 definicije povlači kako ne postoji neki $k \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \vDash^k \neg p$, tj. ne postoji $k \leq n$ za koji $\mathfrak{M}^+, \varphi^\bullet \nvDash^k p$. Ponovno imamo protuslovlje. Aksiomatska je shema Ax18 valjana.

Dokažimo valjanost Ax19. Za dokaz slijeva nadesno, pretpostavimo $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \vDash^n \circ q$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n Cau(p,q) \wedge p$. Iz drugoga konjunkta pretpostavke slijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n Cau(p,q)$ ili $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n p$. No, iz točke 18 definicije 60 i prvoga konjunkta pretpostavke vrijedi $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \vDash^n Cau(p,q)$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \vDash^n p$. Imamo protuslovlje. Za dokaz zdesna nalijevo, pretpostavimo $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \vDash^n Cau(p,q) \wedge p$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n \circ q$. Iz drugoga konjunkta pretpostavke i točke 18 definicije 60 slijedi: $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n Cau(p,q)$ ili $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n p$. No, prema prvome konjunktu pretpostavke: $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \vDash^n Cau(p,q)$ i $\mathfrak{M}^+, \varphi^\odot \nvDash^n p$. Kako ponovno imamo protuslovlje, devetnaesta je aksiomatska shema definicije 65 valjana.

Valjanost Ax20 slijedi izravno iz istinitosnoga uvjeta 17 definicije 60.

Sva pravila zaključivanja LEC$^+$ čuvaju istinitost. To je slučaj sa svim pravilima preuzetima iz LEC (vidi dokaz poučka 3), kao i s pravilom necesitacije ili uvođenja djelatelja $\Box$ (definicija 65, prvi stavak).

$\Box$

3.3.7 Potpunost sustava LEC$^+$

U dokazu se potpunosti sustava proširene logike izlaska svijesti također pozivamo na dokaz ovoga svojstva za podsustav LEC$^+$, jednostavnu logiku izlaska svijesti. Nadovezujemo se na dokaz poučka 4, koji nadopunjamo uzimajući u obzir iskaze tvorene pomoću djelatelja Cau.

Dokažimo najprije definirljivost djelateljā karakterisičkih za $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}^+}$ pomoću djelatelja Cau. U dokazu poučka 4 pokazali smo kako se iskazi koji sadrže priroke A, E, R mogu izraziti iskazima koji sadrže samo prirok D. Sada dokazujemo kako se svi iskazi koji sadrže djelatelje $\circ, \Box, \Diamond$ mogu izraziti samo pomoću djelatelja P i Cau. Prema definiciji 65 za neki i: $\Diamond p \leftrightarrow P^i p$. Isto tako $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$. Stoga se svaki iskaz s djelateljima $\Box, \Diamond$ može izraziti samo djelateljem P. Nakraju, vrijedi $\circ q \leftrightarrow (Cau(p,q) \wedge p)$. Dokaz izvodimo s obzirom na jezik $\mathcal{L}_{\neg\wedge PDCau}$.

Uvodimo također sljedeće definicije, analogne definicijama 40 i 41:

Definicija 66 (Suvislost (konzistentnost) skupa iskazā logike LEC$^+$)**.** *Skup iskaza* Γ *logike* LEC$^+$ *nesuvisao je akko postoji konačan skup* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \Gamma$ *takav da* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}^+} \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$. *Skup je iskaza suvisao akko nije nesuvisao. Kada* $\Gamma = \{p\}$, *umjesto o suvislosti* $\{p\}$ *govorit ćemo o suvislosti* p.

Definicija 67 (Maksimalan suvisao skup iskazā logike LEC$^+$)**.** *Γ^{max} je maksimalan suvisao skup iskaza logike* LEC$^+$ *akko je Γ^{max} suvisao, a svaki pravi nadskup Γ^{max} nesuvisao.*

Postavimo sada uvjete članstva iskazā oblika $Cau(p, q)$ u maksimalnome suvislome skupu (usp. leme 3 i 5). Naime, kao što je to slučaj s iskazima oblika Pp, članstvo iskaza oblika $Cau(p, q)$ u maksimalnome suvislome skupu ovisi o članstvu njihovih podiskaza u nekim drugim maksimalnim suvislim skupovima. I ovdje ćemo se koristiti nizovima maksimalnih suvislih skupova iz definicije 45 na stranici 116. Sukladno tomu, maksimalne ćemo suvisle skupove označavati s Γ^k.

Lema 8 (Članstvo u maksimalnome suvislome skupu (za Cau))**.** *$Cau(p, q) \in \Gamma^k$ akko $p \in \Gamma^{k-m}$ i $q \notin \Gamma^{k-n}$ i za svaki i, ako $p \in \Gamma^{i-1}$, onda $q \in \Gamma^i$, gdje $m > 0, n \geq 0, i \leq k$.*

Dokaz. Za dokaz slijeva nadesno, pretpostavljamo $Cau(p, q) \in \Gamma^k$. Prema lemi 1 (str. 114) i Ax16 sustava LEC$^+$ (definicija 65) slijedi $\Diamond Cp \in \Gamma^k$. Prema Ax17 definicije 65 slijedi kako, za neki $i \geq 0$, $P^iCp \in \Gamma^k$. Sada, koristeći se definicijom 45 (str. 116), izvodimo $Cp \in \Gamma^{k-i}$. Prema Ax11 sustava LEC (definicija 65, uz uputu na definiciju 39 na str. 104) slijedi $p \leftrightarrow \neg Pp \in \Gamma^{k-i}$. U LEC$^+$ poučak je $P\neg p \leftrightarrow \neg Pp$ (vidi str. 109). Zato vrijedi $p \leftrightarrow P\neg p \in \Gamma^{k-i}$. Klasičnom logikom dobivamo $(p \wedge P\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg P\neg p) \in \Gamma^{k-i}$. Ako $p \wedge P\neg p \in \Gamma^{k-i}$, onda $p \in \Gamma^{k-i}$. Uzmemo li sada m za i, dobivamo $p \in \Gamma^{k-m}$. Ako pak $\neg p \wedge \neg P\neg p \in \Gamma^{k-i}$, onda $\neg P\neg p \in \Gamma^{k-i}$. Kako $P\neg p \leftrightarrow \neg Pp$, izvodimo $Pp \in \Gamma^{k-i}$. Tada, prema definiciji 45, slijedi $p \in \Gamma^{k-i-1}$. Uzmemo li m za $i - 1$, dobivamo $p \in \Gamma^{k-m}$. Time smo dokazali prvi konjunkt desne strane.

Za dokaz drugoga konjunkta u dokazu leme 8 slijeva nadesno, iz vrijedeće pretpostavke $Cau(p, q) \in \Gamma^k$ izvodimo $\Diamond Cq \in \Gamma^k$, koristeći se lemom 1 (str. 114) i Ax16 sustava LEC$^+$ (definicija 65). Potom, analogno gornjemu dijelu dokaza leme 8 izvodimo $(q \wedge P\neg q) \vee (\neg q \wedge \neg P\neg q) \in \Gamma^{k-i}$. Ako $(q \wedge P\neg q) \in \Gamma^{k-i}$, onda $P\neg q \in \Gamma^{k-i}$. Prema definiciji 45, $\neg q \in \Gamma^{k-i-1}$. Prema lemi 3 (str. 116), $q \notin \Gamma^{k-i-1}$. Uzmemo li n za $i - 1$, dobivamo $q \notin \Gamma^{k-n}$. Ako pak $(\neg q \wedge \neg P\neg q) \in \Gamma^{k-i}$, onda $\neg q \in \Gamma^{k-i}$. Prema lemi 3, vrijedi $q \notin \Gamma^{k-i}$. Uzmemo li n za i, dobivamo $q \notin \Gamma^{k-n}$. Time smo dokazali drugi konjunkt desne strane.

Za dokaz trećega konjunkta, pod (vrijedećom) pretpostavkom da $Cau(p, q) \in \Gamma^k$, pretpostavimo dodatno da postoji neki i za koji vrijedi: $p \in \Gamma^{i-1}$ i $q \notin \Gamma^i$. Iz $Cau(p, q) \in \Gamma^k$ pomoću leme 1 (str. 114) i Ax15 (definicija 65) izvodimo kako za svaki j vrijedi $P^jp \rightarrow P^{j-1}q \in \Gamma^k$, tj. kako za svaki j vrijedi: ako $P^jp \in \Gamma^k$, onda $P^{j-1}q \in \Gamma^k$. Tada, prema definiciji 45, izvodimo: ako $p \in \Gamma^{k-j}$, onda $q \in \Gamma^{k-j-1}$. To znači da ne postoji neki i za koji vrijedi $p \in \Gamma^{i-1}$ i $q \notin \Gamma^i$, što protuslovi gornjoj pretpostavci. Ovime smo lemu 8 dokazali slijeva nadesno.

Za dokaz zdesna nalijevo, pretpostavljamo: $p \in \Gamma^{k-m}$ i $q \notin \Gamma^{k-n}$ i za svaki i, ako $p \in \Gamma^{i-1}$, onda $q \in \Gamma^{i}$, gdje $m > 0, n \geq 0, i \leq k$. Iz prvoga konjunkta pretpostavke izvodimo, prema definiciji 45 (str. 116), $P^{m}p \in \Gamma^{k}$. Pomoću leme 1, str. 114 i Ax17, definicija 65, izvodimo $\Diamond p \in \Gamma^{k}$. Iz drugoga konjunkta pretpostavke izvodimo, prema definiciji 45, $P^{n}\neg q \in \Gamma^{k}$. Analogno dokazu prvoga konjunkta, izvodimo $\Diamond\neg q \in \Gamma^{k}$. Pretpostavimo sada, za neki j: $P^{j}p \wedge \neg P^{j-1}q \in \Gamma^{k}$. Prema poučku $P\neg p \leftrightarrow \neg Pp$ (vidi str. 109) i pravilu Rep (definicija 65) izvodimo kako za neki j: $P^{j}p \wedge P^{j-1}\neg q \in \Gamma^{k}$. Prema lemi 3, vrijedi da za neki j: $P^{j}p \in \Gamma^{k}$ i $P^{j-1}\neg q \in \Gamma^{k}$. Sada, koristeći se lemom 45, izvodimo: $p \in \Gamma^{k-j}$ i $\neg q \in \Gamma^{k-j-1}$. Uzmemo li $k-1$ za i, dobivamo protuslovlje s trećim konjunktom pretpostavke, pa slijedi kako ni za jedan j: $P^{j}p \wedge \neg P^{j-1}q \in \Gamma^{k}$, tj. kako za svaki j vrijedi: $P^{j}p \rightarrow P^{j-1}q \in \Gamma^{k}$. Iz toga možemo izvesiti kako za svaki $j \geq 0$: $P^{j-1}(Pp \rightarrow q) \in \Gamma^{k}$ (usp. [86, str. 36]). Sada, koriseći se Ax17 i Ax18 (definicija 65), izvodimo $\Box(Pp \rightarrow q) \in \Gamma^{k}$. Iz toga i izvedenih postavki $\Diamond p \in \Gamma^{k}$ te $\Diamond\neg q \in \Gamma^{k}$, koristeći Ax20 (definicija 65, izvodimo $Cau(p,q) \in \Gamma^{k}$.

□

Prelazimo sada na razinu semantike. Podsjećamo najprije da su model LEC ($\mathfrak{M}$) i model LEC^{+} ($\mathfrak{M}^{+}$) definirani na isti način (definicije 33 i 56 na stranicama 102 i 123). Tako će biti slučaj i s kanonskim modelom proširene logike izlaska svijesti.

Definicija 68 (Kanonski model LEC^{+})**.** $\mathfrak{M}^{+kan} = \mathfrak{M}^{kan}$ (definicija 52).

Nadovezujemo se sada na semantički dio dokaza potpunosti sustava LEC, točnije na lemu 6 na stanici 119. Tu lemu nadopunjujemo, budući da sada dokaz izvodimo za jezik $\mathcal{L}_{\neg\wedge PDCau}$. Dokazujemo sljedeću postavku:

- $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{k} Cau(p,q)$ akko $Cau(p,q) \in \Gamma^{k}$.

Dokaz. Pretpostavimo najprije $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{k} Cau(p,q)$. Prema točki 17 definicije 60, za neki $l < k$ vrijedi $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{l} p$. Prema induktivnoj hipotezi, $p \in \Gamma^{l}$, za $l < k$. Neka $l = k - m$. Dakle, postoji neki m, takav da $p \in \Gamma^{k-m}$. Nadalje, prema točki 17 definicije 60, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \nvDash^{l'} q$, za neki $l' \leq k$. Prema induktivnoj hipotezi, $q \notin \Gamma^{l'}$, za neki $l' \leq k$. Neka $l' = k - n$. Dakle, $q \notin \Gamma^{k-n}$. Pretpostavimo sada za neki j: $p \in \Gamma^{j-1}$ i $q \notin \Gamma^{j}$. Prema induktivnoj hipotezi, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{j-1} p$ i $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \nvDash^{j} q$. No, prema točki 17 definicije 60, vrijedi $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{j} q$. Dakle, za svaki $i \leq k$: ako $p \in \Gamma^{i-1}$, onda $q \in \Gamma^{i}$.

Pretpostavimo sada: $p \in \Gamma^{k-n}$ i $q \notin \Gamma^{k-m}$ i za svaki i: ako $p \in \Gamma^{i-1}$, onda $q \in \Gamma^{i}$, gdje: $m > 0, n \geq 0, i \leq k$. Prema induktivnoj hipotezi, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \vDash^{k-n} p$ i $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \nvDash^{k-m}$

q. Time smo zadovoljili drugi i treći konjunkt desne strane dvopogodbe u točki 17 definicije 60. Za dokaz prvoga konjunkta, pretpostavimo da postoji neki $l \leq k$, za koji $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \models^{l-1} p$ i $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \not\models^{l} q$. Prema induktivnoj hipotezi, $p \in \Gamma^{l-1}$ i $q \notin \Gamma^{k}$. Tada iz početne pretpostavke slijedi $q \in \Gamma^{k}$. Dakle, $\mathfrak{M}^{kan}, \varphi^{kan} \models^{k} Cau(p, q)$. □

Sada se nadovezujemo na lemu 7. Naravno, sada zadovoljivost poimamo u skladu s definicijom 61.

Na kraju formuliramo i sam poučak potpunosti za sustav proširene logike izlaska svijesti.

Poučak 6 (Potpunost sustava LEC^{+})**.** *Ako* $\Gamma \models_{\mathrm{LEC}^{+}} p$*, onda* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LEC}^{+}} p$*.*

Dokaz. Analogan dokazu poučka 4, stranica 120. Koriste se pritom, umjesto definicija 35 i 36 na stranici 104, definicije 61 i 62 na stranici 138. □

3.4 Odnos logika izlaska svijesti i nekih drugih formalizama

Ovdje tematiziramo jednostavnu i proširenu logiku izlaska svijesti *vis-à-vis* nekih drugih formalizama. LEC i LEC^{+}, tvrdili smo, oslikavaju neke ključne momente izlaska svijesti. Sada valja istražiti odnos tih formalizama s nekim drugima, posebice intuicionističkom logikom. Također, kako jezik logike LEC^{+} sadrži djelatelje $\Box$ i $\Diamond$, usporedbu vršimo i s modalnim logikama, od kojih posebnu pozornost treba obratiti na logiku S4, koje semantika najviše odgovora intuicionističkoj logici, ali i koje se poučci pomoću Gödelova prijevoda dadu preslikati u poučke intuicionističke logike.

3.4.1 Sustavi intuicionističke, posrednih i klasične logike

Pod "posrednim logikama" mislimo na logike između intuicionističke i klasične logike. A pod "između" mislimo na "položaj" s obzirom na *dokažljivost* (za razliku od valjanosti ili sematičke posljedičnosti). Taj ćemo pak položaj prikazati na kraju sljedećega potpoglavlja. Ovdje temtiziramo neke značajne (ne-)poučke sustava LEC i LEC^{+} nasuprot onih intuicionističke, dvaju posrednih i klasične logike. Pritom sve sustave predstavljamo aksiomatski te govorimo samo o iskaznoj logici.

Prisjetimo se, u potpoglavlju 2.12 govorili smo o "praktičnoj valjanosti" [11, str. 492] klasične logike za svijet osjetā i time opravdali korištenje logike u kojoj vrijedi $p \vee \neg p$ za opisivanje izlaska svijesti[19]. No, ono što smo opisali svijet je *osjetā*. S druge strane, pos-

[19]Brouwer upotrebljava semantički pojam valjanosti; sada govormo o sintaksi, ali pretpostavljamo potpunost klasične iskazne logike.

toji i, takoreći, svijet matematike, koji nastaje konstrukcijama utemeljenima na osnovnoj intuiciji matematike. O Brouwerovoj intuicionističkoj matematici govorili smo u potpoglavlju 2.9. Principe konstrukcije iz osnovne intuicije matematike opisuje intuicionistička logika, koje najpoznatiji prikaz možemo pronaći u Heytinga u [51, 53]. Intuicionističku logiku nazivat ćemo IPC[20]. Klasičnu iskaznu logiku skraćeno ćemo označavati s CPC[21]. Iznesimo ovdje aksiomatizaciju IPC prema [38], koja odgovora onoj u [51, 53].

Definicija 69 (Aksiomatski sustav IPC)**.** *Aksiomatske sheme sustava* IPC *su sljedeće:*

A1) $p \to (q \to p)$

A2) $(p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

A3) $p \to (q \to (p \wedge q))$

A4) $(p \wedge q) \to p$

A5) $(p \wedge q) \to q$

A6) $p \to (p \vee q)$

A7) $q \to (p \vee q)$

A8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$

A9) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

A10) $p \to (\neg p \to q)$.

Pravila su zaključivanja modus ponens i supstitucija.

Iznesimo ovdje oblike nekih iskaza koji nisu izvedivi u IPC [38, str. 35], ali jesu u CPC:

1. $p \vee \neg p$
2. $\neg\neg p \to p$
3. $\neg p \vee \neg\neg p$
4. $(p \vee \neg p) \to (\neg\neg p \to p)$

[20]Prema eng. *intuitionistic propositional calculus.*

[21]Prema eng. *classical propositional calculus.*

5. $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

6. $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$

7. $(p \to q) \vee (q \to p)$.

Time IPC velikim dijelom prati Brouwerovu "filozofiju logike". Prvi iskaz prepoznajemo kao načelo isključenja srednjega, odbacivanje kojega gotovo da je postalo sinonim za intuicionizam. I zaista, Brouwer najviše pažnje posvećuje upravo odbacivanju toga načela. To, naravno, utemeljuje u svojoj pozadinskoj filozofiji. Pitanje valjanosti[22] načela izraženoga s $p \vee \neg p$ Brouwer poima kao pitanje o tome postoje li nerješivi matematički problemi [23, str. 109]. Možemo kazati, ustvrditi iskaz 1 kao aksiom, teorem ili načelo označilo bi konac intuicionističke matematike.

Brouwer tematizira i iskaze 2, 3 i 4 [11, 13]. To proizlazi iz njegova poimanja nijeka kao *apsurda*. Za Brouwera, pokazati neistinitost neke matematike tvrdnje znači svesti je, tj. "reducirati" na apsurd. No apsurd apsurda ne znači istinitost. Iskaz 2, koji se najčešće naziva "načelom dvostrukoga nijeka", Brouwer naziva "načelom recipročnosti apsurda" [13, str. 552]. Zabluda klasične logike je što kao komplementarnu vrijednost istinitosti navodi "lažnost" (od eng. *false*) [13, str. 551]. Stoga načelo izraženo drugim iskazom Brouwer naziva i "načelom recipročnosti komplementarnosti" [9, str. 335] [11, str. 490]. Navodi nadalje kako drugi iskaz slijedi iz prvoga [13, str. 552], ali ne i obratno, čime ustvrđuje načelo izraženo iskazom 4. Treba razlikovati *ne-proturječnost* (tj. suvislost, vidi, primjerice, definiciju 40, str. 114) ili *apsurd apsurda* od *istinitosti*. To Brouwer ilustrira ovim mjestom, koje se često navodi u literaturi:

> [N]etočna teorija, čak i ako ne može biti spriječena nijednim proturječjem koje bi ju opovrgnulo, nije ništa manje netočna, baš kao što zločinačka politika nije ništa manje zločinačka čak i ako ne može biti sprječena nijednim sudom koji bi ju obuzdao. [9, str. 336]

Treći iskaz Brouwer naziva "načelom testabilnosti" [11, str. 490]. *Testirati* neku matematičku tvrdnju (*assertion*) znači dokazati njezinu aspurdnost ili pak apsurdnost njezina apsurda. To načelo naziva se i "oslabljenim zakonom [23] isključenja srednjega" [58, str. 997]. Makar oslabljeno, to načelo za Brouwera ne oslikava principe zaključivanja pomoću praznoga dvojstva.

[22]Vidi bilješku 18.

[23]Ili načelom.

Iskaze 5, 6 i 7, koliko nam je poznato, Brouwer ne tematizira. Peti nam iskaz pokazuje kako jedan protupostav pogodbe ne vrijedi. Obrat iskaza 5, s druge strane, izvediv je u sustavu IPC. Jasno je zašto u intuicionističkoj logici ne vrijedi ni šesti iskaz. Primjerice, tada bismo iz intuicionistima prihvatljivoga načela $p \to p$ mogli izvesti $p \vee \neg p$. Sedmi iskaz naziva se "Dummettovim aksiomom" [38, str. 35].

Definirajmo sada sustav jedne od poznatijih posrednih logika, koju je u [58] ponudio Jankov. Ta logika ima više naziva. Ovdje je nazivamo KC (prema, primjerice, [38] i [30]). No, ona se ponegdje naziva, po uzoru na Brouwera, i "logikom testabilnosti" [79].

Definicija 70 (Aksiomatski sustav KC). *Aksiomatske sheme sustava* KC *uključuju sheme navedene u definiciji* 69 *te sljedeću aksiomatsku shemu:*

- $\neg p \vee \neg\neg p$.

Pravila su zaključivanja modus ponens i supstitucija.

Druga poznatija logika posredna logika jest "Dummetova logika" [38, str. 53] ili logika LC. Predstavimo i nju aksiomatski.

Definicija 71 (Aksiomatski sustav LC). *Aksiomatske sheme sustava* LC *uključuju sheme navedene u definiciji* 69 *te sljedeću aksiomatsku shemu:*

- $(p \to q) \vee (q \to p)$.

Pravila su zaključivanja modus ponens i supstitucija.

Definirajmo na analogan način i klasičnu logiku.

Definicija 72 (Aksiomatski sustav CPC). *Aksiomatske sheme sustava* CPC *uključuju sheme navedene u definiciji* 69 *te sljedeću aksiomatsku shemu:*

- $p \vee \neg p$.

Pravila su zaključivanja modus ponens i supstitucija.

Sada ćemo logike IPC, KC i LC pomati kao skupove poučaka koji vrijede u njihovim sustavima. Te ćemo skupove označavati jednako kao i logike. Vrijedi sljedeći odnos [38, 30]:

$$\mathrm{IPC} \subset \mathrm{KC} \subset \mathrm{LC} \subset \mathrm{CPC}.$$

Terminologijom [55] KC je *pravo proširenje* IPC. LC je pravo proširenje KC itd. Razmotrimo sada sustave LEC i LEC$^+$ *vis-à-vis* intuicionističke, Jankovljeve, Dummettove i klasične iskazne logike. Prije svega, sustavi su izlaska svijesti sustavi naravne dedukcije uz dodatak aksiomatskih shema za djelatelje i priroke karakteristične za ta dva sustava. Jezik logika izlaska svijesti mnogo je bogatiji od jezika logika IPC, KC, LC i CPC. Pogledavši pozornije, vidimo da se su potonji sustavi opisani služeci se samo djelateljima $\neg$, $\wedge$, $\vee$, i $\rightarrow$. Pravila zaključivanja za te djelatelje (definicija 39, stranica 104) odgovaraju pravilima *klasične* logike, tj. skup svih iskaza dokažljivih u LEC i LEC$^+$, a koji sadrže samo djelatelje $\neg$, $\wedge$, $\vee$, i $\rightarrow$ odgovara skupu CPC, odnosno svim iskazima dokažljivim u klasičnoj iskaznoj logici. Kako postoje iskazi koji se ne nalaze meju iskazima dokažljivima u CPC (iz razloga što rabe dodatne simbole), možemo ustvrditi i sljedeće:

$$\text{IPC} \subset \text{KC} \subset \text{LC} \subset \text{CPC} \subset \text{LEC} \subset \text{LEC}^+.$$

Postoji, naravno, čitav niz[24] logika između CPC i LEC$^+$. Neke su od njih modalne logike.

3.4.2 Sustavi modalnih logika

Modalne logike također predstavljmo aksiomatski. Nazive, definicije i odnose modalnih logika preuzimamo iz [55]. Započnimo sustavom K. Aksiomatske sheme sustava K uključuju sve aksiomatske sheme sustava CPC (vidi definiciju 72) te sljedeću aksiomatsku shemu:

K) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

Pravila su zaključivanja modus ponens, supstitucija i necesitacija: ako je p poučak, poučak je i $\Box p$. Za sustave i aksiomatske sheme u modalnoj logici ovdje se koristimo jednakom vrstom oznake. Nadalje, aksiomatske sheme sustava D uključuju sve aksiomatske sheme sustava K te sljedeću aksiomatsku shemu:

D) $\Box p \rightarrow \Diamond p$.

Pravila su zaključivanja modus ponens, supstitucija i necesitacija: ako je p poučak, poučak je i $\Box p$, jednako kao i u sustavu K. Pravila će biti jednaka u svim modalnim sustavima koja iznosimo u ovome potpoglavlju, stoga ćemo ih odsad izostavljati. Djelatelj $\Diamond$ definiran je na sljedeći način:

$$\Diamond p =_{def} \neg\Box\neg p.$$

[24]Kako je dokazao Jankov u [59], čitav kontinuum.

Aksiomatske sheme sustava T uključuju sve aksiomatske sheme sustava K uz:

T) $\Box p \to p$.

Okarakterizirajmo i aksiomatski sustav B. Njegove sheme uključuju sve aksiomatske sheme sustava T, kao i:

B) $p \to \Box\Diamond p$.

Kako navode Hughes i Cresswell [55, str. 70–71, bilješka 5], shema B dobila je ime upravo po Brouweru. Naime, Brouwerovo "snažno" poimanje nijeka kao svođenja na apsurd možemo protumačiti kao $\Box\neg$, gdje $\Box$ poimamo kao nužnost. Kako smo gore naveli, u IPC poučak nije $\neg\neg p \to p$. No, obrat toga iskaza poučak je u IPC. Možemo kazati kako je pravi smjer pogodbe između p i $\neg\neg p$ za Brouwera isključivo s p na $\neg\neg p$. Učinimo li sada u islazu $p \to \neg\neg p$ nijek nužnim, dobivamo $p \to \Box\neg\Box\neg p$, tj. aksiomatsku shemu B.

Nadalje, aksiomatske sheme sustava S4 uključuju sve aksiomatske sheme sustava T i ovu aksiomatsku shemu:

4) $\Box p \to \Box\Box p$.

Aksiomatske sheme sustava S4.2 sve su aksiomatske sheme sustava S4 uz dodatak sheme:

G1) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

Aksiomatske sheme sustava S4.3 uključuju sve aksiomatske sheme sustava S4 te:

D1) $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$.

Nakraju, aksiomatske sheme sustava S5 uključuju sve aksiomatske sheme sustava T te sljedeću aksiomatsku shemu:

5) $\Diamond p \to \Box\Diamond p$.

Naziv aksiomatske sheme karakteristične za sustav S5 u [55] je E.

Shvatimo li logike kao skup njihovih poučaka, vrijedi slijedeće:

$$\mathrm{K} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{T} \subset \mathrm{S4} \subset \mathrm{S4.2} \subset \mathrm{S4.3} \subset \mathrm{S5}$$

Uočimo kako gore ne nalazimo logiku B. Ta logika, kao i S4, sadrži T te je sadržana u S5. No, B niti sadrži niti je sadržana u S4, tj. vrijedi sljedeće:

K ⊂ D ⊂ T ⊂ B ⊂ S5.

Razmotrimo sada sustav LEC$^+$ *vis-à-vis* gore definiranih sustava modalnih logika, budući da jezik $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}^+}$, za razliku od jezika $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}}$ sadrži djelatelje $\Box$ i $\Diamond$. Pogledamo li definiciju sustava LEC$^+$ (definicija 65, stranica 140), vidjet ćemo da taj sustav sadrži sve aksiomatske sheme sustava S4.3. Pravila zaključivanja za sustav S4.3 također su sadržana u LEC$^+$. Stoga možemo zaključiti kako svi poučci prethodne logike vrijede i u potonjoj. Naravno, $\mathcal{L}_{\mathrm{LEC}^+}$ sadrži neke djelatelje i priroke (a onda i poučke koji ih netrivijalno sadrže) koje ne nalazimo u S4.2. Možemo zato ustvrditi sljedeće:

K ⊂ D ⊂ T ⊂ S4 ⊂ S4.2 ⊂ S4.3 ⊂ LEC$^+$.

Razmotrimo također odnos logike LCG *vis-à-vis* gore definiranih sustava modalnih logika, budući da je ta logika promjene "modalnolika". Dva djelatelja koja možemo pojmiti modalno, tj. kao $\Box$ ili $\Diamond$, su C i N.[25] Ovdje apstrahiramo od tumačenja; u obzir uzimamo samo *oblike* poučaka. U potpoglavlju 3.1 ustvrdili smo kako vrijedi:

$Cp \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Np)$, tj.
$Np \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg Cp)$.

No, makar uzajamno definirljivi, djelatelji C i N nisu *dualni djelatelji*, kao što su to $\Box$ i $\Diamond$, odnosno ne vrijedi:

$Cp \leftrightarrow \neg N \neg p$, niti
$Np \leftrightarrow \neg C \neg p$.

Uzmemo li C kao primitivan djelatelj, koristimo se aksiomatskim shemama i pravilima zaključivanja iz definicije 14 na stranici 89. Učinimo najprije tako. Pogledajmo najprije jesu li poučci za C u LCG jednakoga oblika kao i poučci za djelatelj $\Box$ iz ranije iznesenih sustava modalnih logika. Kako to nije slučaj, vidjet ćemo već ako pogledano prvi aksiom LCG. Zamijenivši C s $\Box$, dobivamo:

$\Box p \to \Box \neg p$.

[25] To možemo učiniti jer u jeziku LCG ne nalazimo djelatelje $\Box$ i $\Diamond$.

Taj iskaz nije poučak ni u jednome modalnome sustavu definiranome u ovome potpoglavlju.[26] Zamijenimo li pak u prvoj aksiomatskoj shemi C s dualom djelatelja $\Box$, dobivamo:

$$\Diamond p \to \Diamond\neg p.$$

Taj je iskaz istovrijedan iskazu

$$\Diamond p \to \neg\Box p.$$

Taj iskaz također ne nalazimo među poučcima modalnih sustava između K i S5.[27]

Nadalje, aksiomatska shema K, koju nalazimo u svim normalnim modalnim logikama, ne vrijedi za djelatelj C, tj. u LCG iskaz

$$C(p \to q) \to (Cp \to Cq)$$

nije poučak [86, str. 30–31]. Zaključujemo kako LCG bez djelatelja N u kojem je djelatelj C zamijenjen s $\Box$ ili $\Diamond$ nije pravo proširenje nijednoga normalnoga modalnoga sustava.

Uzmimo sada kao primitivan djelatelj N. Tada kao aksiomatske sheme možemo uzeti iskaze navedene u poučku 2 na stranici 90. Možemo također rabiti pravilo uvođenja djelatelja N, koje je izvedivo u LCG (vidi poučak 1 na stranici 90). Uzevši još, primjerice, aksiomatske sheme i pravila iz sustava CPC (definicija 72), dobivamo sustav deduktivno ekvivalentan sustavu LCG, kako smo naveli u potpoglavlju 3.1. Tamo smo taj sustav nazivali N, prema terminologjiji iz [83]. Ovdje ćemo se koristiti nazivom LNG.

Zanimljiv rezultat dobivamo zamijenimo li u aksimatskim shemama sustava LNG djelatelj N s $\Box$. Tada dobivamo: sljedeće aksiomatske sheme (usp. poučak 2, stranica 90):

1. $\neg\Box p \leftrightarrow \Box\neg p$
2. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Druga shema odgovara shemi K. Rastavimo prvu shemu na dvije pogodbe:

[26]Spomenimo ovdje jedno intuitivno tumačenje *nužnosti* prema kojem bi iskaz $\Box p \to \Box\neg p$ bio logička istina. Prije svega, taj iskaz istinit je u svakome "slijepome" svijetu, tj. svijetu kojem nijedan svijet nije dostupan, u kojem je sve nužno, pa i proturječje. No, kada ne govorimo o slijepim svjetovima, tj. kada postoji barem jedan svijet dostupan svijetu u kojem je istinito $\Box p \to \Box\neg p$, taj iskaz izražava kako je u potonjem svijetu sve kontingentno.

[27]Spomenimo ovdje intuitivno tumačenje *nužnosti* i *mogućnosti* koje bi iskaz $\Diamond p \to \neg\Box p$ učinilo smislenim. Naime, pod (svjesno ili nesvjesno postavljenom) pretpostavkom načela milosrđa, u svakodnevnome razgovoru, čuvši da je što moguće, često uzimamo da to nije nužno, jer da jest, sugovornik bi zasigurno to i kazao, budući da (u svakodnevnome razgovoru) nužnost najčešće povlači mogućnost.

1'. $\Box\neg p \to \neg\Box p$.

1". $\neg\Box p \to \Box\neg p$

Iskaz 1' istovrijedan je iskazu $\Box p \to \Diamond p$, tj. aksiomatskoj shemi D.

U sustavu D aksiomatske sheme su K i D. Stoga možemo zaključiti kako sustav LNG, s $\Box$ umjesto N sadrži sustav D, kada te sustave poimamo kao skup poučaka koji u njima vrijede. Tada stoji:

$$\mathrm{D} \subseteq \mathrm{LNG}.$$

Razmotrimo sada iskaz 1". On je istovrijedan iskazu $\Diamond p \to \Box p$ pomoću kojega možemo definirati novi modalni sustav, $\mathrm{KD_C}$ [55, str. 362]. Aksiomatske sheme sustava $\mathrm{KD_C}$ uključuju sve aksiomatske sheme sustava K te sljedeću aksiomatsku shemu:

$\mathrm{D_C}$) $\Diamond p \to \Box p$.

Sustav $\mathrm{KD_C}$ niti sadrži niti je sadržan u sustavu D, ali oba sadržavaju K. Međutim sustav LNG sadrži i $\mathrm{KD_C}$ i D, tj. također vrijedi

$$\mathrm{KD_C} \subset \mathrm{LNG}.$$

Međutim, ne vrijedi

$$\mathrm{LNG} = \mathrm{D} \cup \mathrm{KD_C}.$$

Naime, makar smo iz jezika logike promjene LCG eliminirali djelatelj C, ostala su još dva djelatelja: G^+ i G^- (vidi točku 3 definicije 1, stranica 83 i definiciju 19 na stranici 93). Ti djelatelji oslikavaju promjenu u razini iskaza (definicija 5, stranica 84) te o njima vrijede neki (netrivijalni) poučci. Sustav LNG pravo je proširenje kako sustava $\mathrm{KD_C}$, tako i sustava D, time što u jeziku LNG u jezik uvodimo razinu iskaza. Vrijedi:

$$\mathrm{D} \cup \mathrm{KD_C} \subseteq \mathrm{LNG}.$$

Napomenimo još da su logike IPC, KC, LC i CPC sadržane u modalnim sustavima K i jačima. Slično, logike LNG i LCG sadržane su u LEC, budući da u njima vrijede poučci o prirocima koji nisu sadržani ni u LCG ni u LNG, uz uvjet da se umjesto N koristimo djelateljem P (vidi točke 3 i 4 definicije 1 na stranici 83).

Shvatimo li neku logiku kao skup njezinih poučaka, odnose među nekim logikama možemo predstaviti rešetkom (vidi sliku 2, str. 155). Neisprekidanim crtama pritom prikazujemo odnos skup-nadskup odnosno skup-podskup, na način da, ako su dvije oznake koje predstavljaju logike povezane neisprekidanom crtom, onda je skup poučaka logike koje je oznaka bliže donjoj margini podskup skupa poučaka logike koje je oznaka bliže gornjoj margini. Istočkanom crtom povezujemo sustave koji su deduktivno ekvivalentni. U rešetci logika LCG označava logiku promjene LCG bez djelatelja N, LNG tu logiku bez djelatelja C.

3.4.3 Intuicionistička, posredne i klasična logika kao modalne logike

Ostajemo još uvijek na razini sintakse. U ovome potpoglavlju razmatramo još jedan način na koji su sustavi IPC, KC, LC i CPC povezani sa modalnim sustavim koje smo definirali u prošlome potpoglavlju, a preuzeli iz [55].

Naime, Gödel u [47] definira prijevod iskaza koji sadrže djelatelje $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ u iskaze koji sadrže djelatelje $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ i B, gdje je intuitivno tumačenje iskazā oblika Bp: "p je dokažljiv" (*beweisbar*) [47, str. 300]. Iznosimo ovdje jedan gödelovovski prijevod.Umjesto B pišemo $\Box$.

Definicija 73 (Gödelovski prijevod iskazā)**.** *Gödelovski prijevod iskazā (g) funkcija je takva da, ako je α atomaran iskaz:*

1. $g(\alpha) = \Box\alpha$.

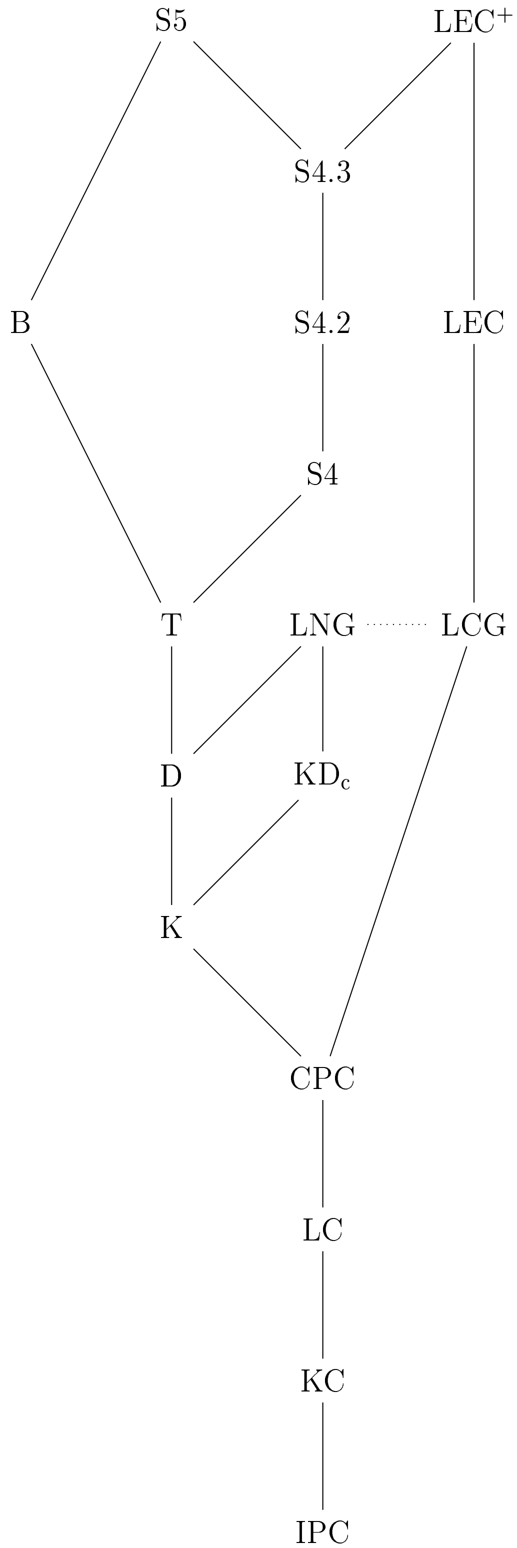
Za svaki iskaz p i q:

2. $g(\neg p) = \neg\Box g(p)$
3. $g(p \wedge q) = g(p) \wedge g(q)$
4. $g(p \vee q) = \Box g(p) \vee \Box g(q)$
5. $g(p \rightarrow q) = \Box(g(p) \rightarrow g(q))$.

Za prijevod nekoga skupa iskaza Γ pišemo $g(\Gamma)$.

Gödelov(ski) je prijevod takav da poučke logike IPC preslikava u poučke S4 [47, str. 300], tj. vrijedi:

Ako IPC $\vdash p$, onda S4 $\vdash g(p)$.



Slika 2: Rešetka logika

McKinsey i Tarski [69] pokazali su kako vrijedi i obrat. Možemo stoga ustvrditi, pojmimo li neku logiku kao skup njezinih poučaka:

$$g(\mathrm{IPC}) = \mathrm{S4}.$$

Gödelovskim prijevodom možemo prevesti, naravno, i poučke posrednih te klasične logike. Vrijede slijedeći odnosi [31, str. 325]:

$$g(\mathrm{KC}) = \mathrm{S4.2}$$
$$g(\mathrm{LC}) = \mathrm{S4.3}$$
$$g(\mathrm{CPC}) = \mathrm{S5}.$$

Za logike S4, S4.2, S4.3 i S5 kažemo da su "modalni pratitelji" (*modal companions*) [31, str. 322] logika IPC, KC, LC i CPC.

Nadopunimo sada rešetku logika sa stranice 155 modalnim pratiteljima. U rešetci logika s modalnim pratiteljima (vidi sliku 3, str. 157) zakrivljenim isprekidanim crtama povezane su oznake logičkih sustava, na način da, ako su dvije oznake povezane takvom crtom, tada je sustav kojega je oznaka bliže gornjoj margini modalni pratitelj sustava kojega je oznaka bliže donjoj margini.

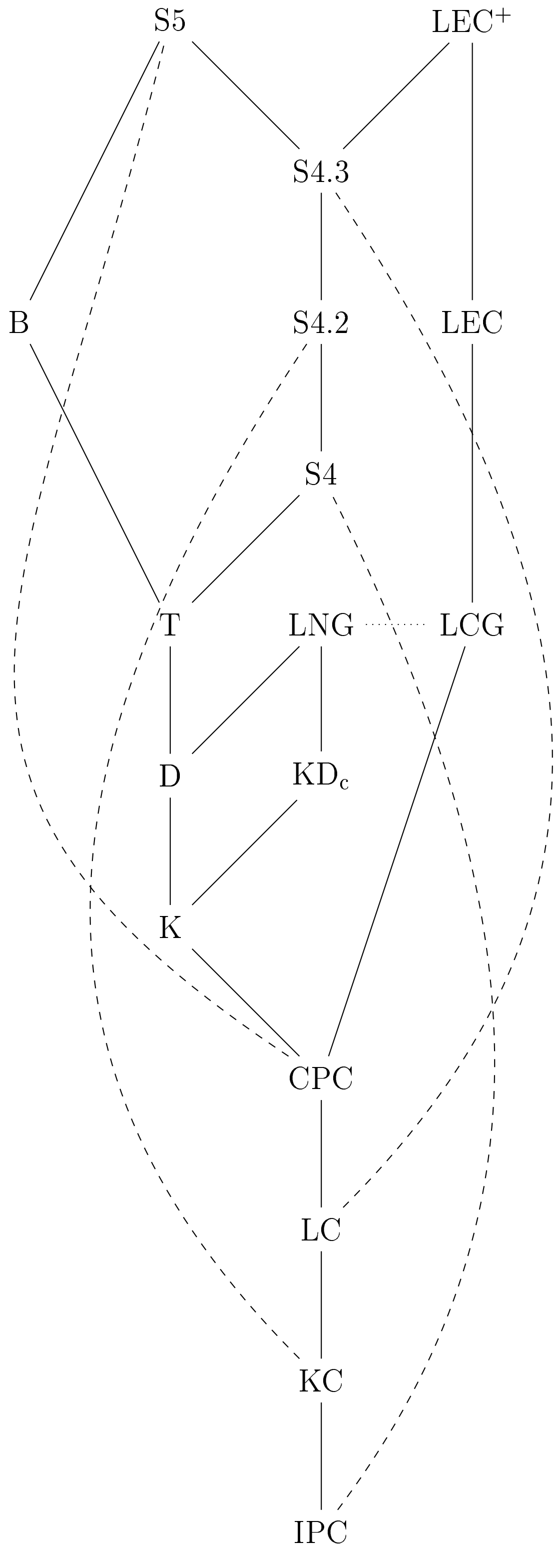
3.4.4 Semantike logika izlaska svijesti i semantike intuicionističke logike

Usmjerimo se sada na semantiku; uspoređujemo Grzegorczykovu [48] i Kripkeovu [66] semantiku za Heytingovu [51, 53] intuicionističku logiku sa semantikama jednostavne i proširene logike izlaska svijesti.

Grzegorczykova [48] semantika za [51] opisuje susljedno nadopunjavanje skupa podataka u nekome znanstvenome istraživanju novim utvrđenim činjenicama. Brouwerovski kazano, subjekt koji provodi znanstvno istraživanje u svakome novome trenutku (Grzegorczyk: "stanju" [48, str. 597]) kao sadržaj svijesti ima neki skup podataka, odnosno, osjetā. Nadalje, nekomu skupu podataka u nekome trenutku može biti *dostupno* više mogućih, nadopunjenih skupova iskustvenih podataka. Slično, Kripkeova [66] semantika za [53] opisuje točke u vremenu ili "evidencijske situacije" [66, str. 98]. Relacija dostupnosti među evidencijskim situacijama refleksivna je i prijelazna.

Vidjeli smo kako je u modelu proširene logike izlaska svijesti valjan iskaz

$$\Box(\Box p \to q) \lor \Box(\Box q \to p).$$



Slika 3: Rešetka logika s modalnim pratiteljima

Radi se aksiomatskoj shemi D1, karakterisičnoj za sustav S4.3 koji je okarakteriziran klasom modela kojih je relacija dostupnosti refleksivna, prijelazna i *povezana* [55, str. 128]. To svojstvo može se izraziti jezikom logike prvoga reda:

$$\forall x \forall y \forall z ((xRy \wedge xRy) \rightarrow (yRz \vee zRy)).$$

Povezanost mogućih svjetova osjetā posljedica je činjenice da su logike izlaska svijesti *prošlosne logike*. Već smo naveli kako je za Brouwera istinitost samo u prijašnjim i sadašnjem stanju svijesti. U logikama izlaska svijesti postoji "memorijska povezanost prošlih trenutaka".

No, među onime što može biti istina nalaze se i "matematička djela" (*mathematical deeds*) [11, str. 488]. Stoji li među mogućim matematičkim konstrukcijama tvorenim pomoću praznoga dvojstva relacija dostupnosti koja je povezana? Smatramo kako je odgovor negativan. Naime, takav bi uvjet uvelike ograničio samoodmatanje osnovne intuicije matematike, koju smo opisali u potpoglavlju 2.9. Konkretno, povezanost matematičkih konstrukcija značila bi ukidanje ili barem ograničavanje *konstrukcijske slobode* stvarajućega subjekta. Primjerice, uzevši neku konstrukciju čiste matematike (p), subjekt može, temeljem slobodnoga izbora, konstruirati q ili pak r. No, ako vrijedi da se q dade konstrurati iz r ili obratno, tada inicijalne konstrukcije ipak nisu *potpuno* slobodne; one su takve da se jedna uvijek može dobiti pomoću druge, krenuvši od istoga početnoga stanja.

Isto tako, konstrukcije mogu biti, takoreći, raznorodne. Subjekt može temeljem prošlih konstrukcijskih iskustava biti u stanju konstrirati, primjerice, neki niz brojeva i neko geometrijsko tijelo. Ako su te dvije konstrukcije povezane, tada bi subjekt isto tako morao biti u stanju tvoreni niz brojeva pretvoriti u načinjeno geometrijsko tijelo, a to se čini prestrogim zahtjevom.

Nadalje, iskazi valjani u logici S4.3 uključuje one valjane u S4.2. Za sustav potonje logike karaktristična je aksiomatska shema

$$\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p.$$

Klasa modela za sustav S4.2 sadrži relaciju dostupnosti koja ja refleksivna, prijelazna i *konvergentna* ili *usmjerena* [55, str. 134]. Potonje svojstvo također se može izraziti logikom prvoga reda:

$$\forall x \forall y \forall z ((xRy \wedge xRz) \rightarrow \exists v (yRv \wedge zRw)).$$

Ponovno, konvergencija vrijedi kada govorimo o prošlim i sadašnjem iskustvu, kako je to slučaj s logikama izlaska svijesti. Prošlost je *linearna*, tako da su sva prošla iskustva usmjerena prema, primjerice, sadašnjenu.

S druge strane, kada govorimo o matematičkim konstrukcijama, smatramo da je konvergencija nepoželjno svojstvo. Ovdje se od stvarajućega subjekta ne traži sposobnost da "konstrukcijski poveže" bilo koje dvije moguće matematičke konstrukcije, ali zahtijeva se da pomoću bilo kojih dviju mogućih matematičkih konstrukcija izvede neku novu, jedinstvenu. To bi značilo da se sve (slobodne) konstrukcije naposlijetku "sažimaju" u jednoj točki, što je protivno Brouwerovu isticanju slobodne volje pri konstruiranju objekata čiste intuicionističke matematike; prošla su iskustva linearna, no moguća su konstrukcijska iskustva *razgranata*.

Prema filozofiji intuicionizma, konstrukcije nisu samo slobodne, već i *trajne*; jednom izvedeni dokazi jamče "vječnu" istinitost iskaza koji ih predstavljaju. Primjerice, Grzegorczyk u [48, str. 596] navodi kako se "intuicionistička logika može shvatiti kao logika znanstvenoga istraživanja (pojmljenoga poprilično (*rather*) pozitivistički) dok je s druge strane klasična logika logika ontologijske misli". Ono što takvo znanstveno istraživanje čini pozitivističkim jest svojstvo *hereditarnosti* ili *nasljednosti*: ako je svijetu s dostupan svijet s' i u s je istinit iskaz p, onda je i u s' istinit p. Naime, Grzegorczykov model opisuje povećavanje danoga skupa informacija znanstvenim istraživanjem, nadolaskom novih "iskustvenih podataka" [48, str. 596]. No, jednom otkriveni, podatci kojima odgovara neka znanstvena teza ostaju istiniti, ne zaboravljaju se. Kako navodi Świętorzecka [86, str. 207], u Grzegorczykovu poimanju napretka znanstvenoga napretka isključene su "pogreške".

Svojstvo nasljednosti vrijedi i u Kripkeovoj semantici za intuicionističku logiku, uz razliku što Kripke iskaze tumači kao *dokaze*; primjerice, navodeći protuprimjer principu isključenja trećega, kazuje da je to situacija u kojoj "još nismo dokazali p; niti možemo ustvrditi $\neg p$" [66, str. 100]. No, jednom izvršene "konstrukcije u umu", odnosno jednom utvrđeni iskazi koji ih predstavljaju, u sljedećim se situacijama ne zaboravljaju.

U LCG svojstvo nasljednosti možemo prikazati čisto rastućim povijestima [86, str. 203]. O tim smo povijestima govorili u okviru istinitosti uzročnih iskaza (definicija 59, stranica 134). Ustvrdili smo kako u logikama izlaska svijesti promjena strukture mogućih svjetova s obzirom na LCG, koju uvodimo kako bismo bolje opisali Brouwerovu "fenomenologiju", rezultira time da u logikama izlaska svijesti postoji samo jedna čisto rastuća povijest, koju smo nazvali i "osnovno pozitivnom poviješću" (vidi str. 135). U čisto rastućim povijestima logika LEC i LEC$^+$ za svaki iskaz p vrijedi $\neg Cp$; ništa se ne mijenja.

Stoga je djelatelj C, na neki način, suvišan; nijedan iskaz oblika Cp nije istinit. Nadalje, djelatelj P postaje "logički besposlenim" (*logically idle*) [86, str. 82]. Naime, čisto rastuće povijesti, osim s $\neg Cp$, možemo okarakterizirati i iskazom $p \leftrightarrow Np$ [86, str. 82]. U jeziku logika izlaska svijesti taj iskaz postaje $p \leftrightarrow Pp$. To znači da nam je, kako bismo ustvrdili istinitosnu vrijednost iskazā oblika Pp potrebno samo razmotriti istinitosnu vrijednost podiskazā p. Na neki način, u povijestima koje isključivo rastu nije smisleno govoriti o prošlosti, jer sva je prošlost sadržana u sadašnjem trenutku.

Istražimo posljedice nasljednosti povijestî najprije unutar proširene logike izlaska svijesti. Prisjetimo se, u potpoglavlju 3.3.3 ustvrdili smo kako subjekt tvoreći uzročne iskaze (o kojima, za razliku od LEC, govori LEC$^+$) razmatra isključivo *promjenljive* iskaze. U uzročne lance, vidjeli smo, ulaze samo potkonjunkcije (definicija 54, stranica 122) podložne promjeni. Stoga u čisto rastućoj povijesti proširene logike izlaska svijesti nema istinitih uzročnih iskaza. To najbolje vidimo promotrivši četrnaestu aksiomatsku shemu sustava LEC$^+$ (definicija 65, stranica 140):

$$Cau(p,q) \rightarrow (\Diamond Cp \wedge \Diamond Cq),$$

gdje su (prema definiciji 55, stranica 122) p i q neke potkonjunkcije svjetova $s_n \in B_n$. Iskaz $Cau(p,q)$ nije istinit ako promjena istinitosne vrijednosti barem jednoga od od podiskaza p i q nije moguća. A tako je u čisto rastućim povijestima sa svim iskazima. U "nasljednim povijestima", dakle, za svaku potkonjunkciju q i r, vrijedi $\neg Cau(q,r)$. Radi "besposlenosti" P, posla u LEC$^+$ neće imati ni djelatelji $\Box$ i $\Diamond$, koje definiramo pomoću P.

Obratimo sada pozornost na djelatelje G^+ i G^-. U svakome trenutku $n \geq lv(p)$: $\mathfrak{M}^+, \varphi^{cr} \vDash^n \alpha_1 \wedge \ldots \alpha_n$, gdje je φ^{cr} čisto rastuća povijest. U logici promjene LCG, kao i u logikama izlaska svijesti, G-promjene označavaju promjenu razine nekoga iskaza. Ako $lv(p) = k-1$: $G^+p \leftrightarrow (p \wedge \alpha_k)$ i $G^-p \leftrightarrow (p \wedge \neg\alpha_k)$. Kazali smo kako je u logikama izlaska svijesti čisto rastuća povijest isključivo *pozitivna*. Stoga vidimo kako ni za jedan p u logikama izlaska svijesti ne vrijedi G^-p, budući da ni za jedan n ne vrijedi: $\mathfrak{M}, \varphi^{cr} \vDash^n \neg\alpha_n$, kao ni $\mathfrak{M}^+, \varphi^{cr} \vDash^n \neg\alpha_n$. U LEC i LEC$^+$ sa svojstvom nasljednosti postoje samo G^+-promjene. Zaključujemo kako LEC$^+$ nije prikladna logika za opis rasta matematičkoga znanja. Nijedan iskaz karakterističan za proširenu logiku izlaska svijesti, odnosno, nijedan iskaz oblika $Cp, Pp, \Diamond p, \Box p, Cau(p,q), G^+p, G^-p$ nema poželjnu ekspresivnu snagu.

No, je li jednostavna logika izlaska svijesti bliskija intuicionističkoj logici? Priroci karakteristični za LEC izražajavu svojstva jastvenosti, otuđenosti, želje i zazora. U Brouwerovoj filozofiji, to su svojstva *osjetā*. Prema našem mišljenju, ta se svojstva ne primjenjuju na konstrukcije pomoću *praznoga* dvojstva. Osnovna intuicija matematike jest dvojstvo lišeno "svih kvaliteta" [11, str. 482], [16, str. 510], [21, str. 523]. U kvalitete nekoga osjeta, razložno je pretpostaviti, ubrajamo i njegovu jastvenost ili otuđenost. Prema ovome tumačenju, priroci A, E,D i R nisu dio rječnika logike matematičih konstrukcija.

Ipak, u [17, str. 127] Brouwer kazuje kako do osnovne intuicije matematike dolazimo "apstrahiranjem od emocionalnoga sadržaja". To bismo mogli shvatiti kao tezu da je "svijet matematike" u potpunosti jastven; uz legitimnu dodatnu pretpostavku da matematičke konstrukcije u umu, takoreći, čuvaju jastvenost. No, ni to tumačenje ne osigurava plodonosnu upotrebu rječnika LEC; jednostavno za svaki iskaz p vrijedi: Ep.

Postoji i srednje tumačenje, koje sugerira van Dalen. Kako smo detaljnije iznijeli u potpoglavlju 2.11, van Dalen jastvenim smatra ono što je pod utjecajem volje subjekta. Budući da Brouwer volju spominje i unutar matematike, vandalenovska interpretacija nudi mogućnost govora o jastvenim otuđenim konstrukcijama. Primjer su konstrukcije nizova brojeva: stvarajući subjekt može svaki član niza *po volji* odabrati ili pak može odlučiti svoju slobodu (*volje*) pri izboru ograničiti. Tako je primjerice, prema van Dalenu, skup $\mathbb{N}$ "niskoga stupnja jastvenosti" [36, str. 4]. Ipak, za tu interpretaciju ne nalazimo potvrdu u izvornim tekstovima. Brouwer jastvenost i otuđenost ne spominje unutar konteksta čiste matematike, pa je teško ustvrditi je li za neke od konstrukcija smatrao da su više jastvene od ostalih. Zaključujemo kako u domeni čiste matematike ili ne možemo, ili ne možemo na netrivijalan način upotrijebiti rječnik i gramatiku jednostavne logike izlaska svijesti.

Što preostaje kada, slijedeći intuicionističke principe "ogolimo" logike izlaska svijesti? Odgovor je: logika s čisto rastućom i isključivo pozitivnom poviješću; nazovimo ju LEC^{-}. Nju možemo izraziti u LCG. Logici promjene LCG potrebno je dodati aksiomatsku shemu $\neg Cp$, kako bismo osigurali nasljednost, i $\neg G^{-}p$, kako bismo dobili "pozitivnost". Drugim riječima, radi se o logici LCG s čisto rastućom poviješću i "brouweriziranom" strukturom mogućih svjetova. Međutim, takva logika nije intuicionistička. Kako smo vidjeli u definiciji 14, sustav LCG sadrži sve tautologije *klasične* logike. Ipak, načelo isključenja trećega u LCG ne vrijedi univerzalno. Ako $lv(p) > n$, onda p u n nema istinitosnu vrijednost. No, to vrijedi za svaki iskaz, a ne samo za iskaze koji imaju oblik intuicionistima neprihvatljivoga načela. Po ovome princip isključenja srednjega nije izdvojen na način kako je to učinjeno u intuicionističkoj matematici, pa time i logici.

Kako smo tvrdili u potpoglavlju 2.12, načelo $p \vee \neg p$ izdvojeno je upravo zato što njegova primjena nije opravdana u beskonačnim domenama, a takve su domene matematičkih konstrukcija. Riječima van Attena, i "najobičniji dokazi u nekome trenutku sadrže opće pokoličen iskaz", koji sadrži "beskonačno mnogo oznaka (*terms*)" [3, str. 17]. S druge strane, struktura mogućih svjetova u LCG i logikama izlaska svijesti u svakome je trenutku ili stupnju *konačna.* Moguće svjetove prikazali smo kao konačne konjunkcije određenoga oblika. Subjekt zaključujući o svijetu osjetā raspolaže samo s konačnim brojem "oznaka", jer njihovo su značenje osjeti, kojih je pak uvijek konačan broj.

Stoga izgleda da ni LEC^{-} ne oslikava intuicionističke principe matematičkoga zaključivanja. U stanovitome smislu, svijet matematike ili domena matematičkih konstrukcija "raste brže" negoli svijet osjeta. U svakoj logici izlaska svijesti, pa i onoj "rudimentarnoj"-LEC^{-}, svakim novim trenutkom nadolazi jedan novi jednostavan osjet. Međutim, matematički objekti ne nastaju uvijek "jedan po jedan". Kako smo dodatno obrazložili u potpoglavlju 2.12, odmatanje osnovne intuicije matematike "nije ograničeno vanjskim svijetom, i time konačnošću i odgovornošću" [11, str. 484]. Kada bi, primjerice, prirodni brojevi nastajali jedan po jedan, intuicionist o skupu $\mathbb{N}$ ne bi mogao smisleno govoriti, dok Brouwer to čini na samome početku svoje disertacije [20, str. 15].

Samoodmatanje praznoga dvojstva neograničeno konačnošću i odgovornošću oslikano je i u semantikama Grzegorczyka i Kripkea. Kod Grzegorczyka, skup se "iskustvenih podataka" [48, str. 596] može iz trenutka u trenutak povećati za neki konačan (i višečlan) niz iskustvenih podataka. Slično je i s Kripkeovim "evidencijskim situacijama" [66, str. 98]. Susljedna evidencijska situacija može biti mnogo "bogatija" od prethodne. Kako precizira Świętorzecka [86, str. 206], Grzegorczykova semantika "sadrži skokove $(\ldots \alpha_n, \alpha_k, \ldots)$, gdje $k > n + 1$." Dodajmo kako je u objema sematikama moguće prijeći u novo stanje ili trenutak i bez povećanja skupa informacija, što je u logikama izlaska svijesti nemoguće. Stoga, makar u LEC i LEC^{+} možemo oslikati svojstvo nasljednosti, "nepravilan" rast matematičkoga znanja ne možemo predstaviti u modelima tih logika; struktura svijeta osjetā ne odgovara strukturi "evidencijskih situacija" stvarajućega subjekta.

4 ZAKLJUČAK

Nema onoga tko neće na pitanje: "u čemu je, prema intuicionizmu, utemeljena matematika?" dati točan odgovor. No, kako se pokazuje, točan odgovor na pitanje što se pod time misli nešto je kompleksniji. Prije svega, intuicija nije neka *sposobnost*, "intuiranje". Ona je – u najširem smislu riječi – objekt. Punim imenom, radi se o "osnovnoj intuiciji matematike", makar je Brouwer, utemeljitelj intuicionizma, često naziva i drukčije. Taj objekt nije u svijesti prisutan *a priori*, već je osnovna intuicija matematike rezultat procesa apstrakcije. Ta se apstrakcija pak provodi nad osjetilnim sadržajem. Suočeni s pitanjem: "što je osjetilni sadržaj?", moramo razmotriti Brouwerovu širu teoriju svijesti, budući da su i osjeti, tj. njihova konstitucija u "sadržaj", rezultat jednoga procesa – izlaska svijesti. Prije pojave matematičkih konstrukcija svijest mora zadovoljiti neke preduvjete. Prije svega, mora izaći iz "najdubljega doma".

U ovoj smo disertaciji ponudili analizu, a potom i formalni prikaz Brouwerove teorije izlaska svijesti. Koristivši [11] kao polazišnu točku analize, ali i nekoliko Brouwerovih "filozofičnijih" radova, izlučili smo pojmove ključne za razumijevanje Brouwerove teorije svijesti, koja se često naziva i njegovom "pozadinskom filozofijom". Opisali smo sve tri "faze" izlaska svijesti, ispratīvši razvoj svijesti od najdubljega doma do matematičke aktivnosti. Posebnu smo pozornost posvetili logici u izlasku svijesti, za koju smo ustvrdili da se ne može poistovjetiti (samo) s Heytingovom intuicionističkm logikom. Naime, u izlasku svijesti, tvrdi Brouwer, postoji mjesto i za klasičnu logiku. Ona ima "praktičnu valjanost". To je vezano uz uzročno razmišljanje, koje na red dolazi tek u drugoj fazi izlaska svijesti. Matematika je, s druge strane, utemeljena u "intuiciji vremena", što je drugi naziv za osnovnu intuiciju matematike. Vremensko razmišljanje odlika je prve faze svijesti; vremenitost je svojstvo osjetilnoga sadržaja. No, kako postoji vrijeme bez osjetā (u intuiciji), tako postoji i osjet bez vremena. Brouwer spominje, naime, stanje svijesti koje prethodi prvoj fazi njezina izlaska.

To predvremensko stanje svijesti tzv. je "najdublji dom svijesti" ili "sebstvo". U njemu, kazuje Brouwer, svijest oscilira između osjeta i mirnoće. Svijest o vremenu nastaje kada se u svijesti pojave dva odvojena osjeta. Tada se otvora mogućnost da se fenomen "dvojstva" opetuje. Time se u svijesti stvara "svijet osjetā". Ipak, svijest nije svojim izlaskom ostala potpuno nevezana uz najdublji dom. Osjeti poredani u vremenu imaju i dva bitna svojstva – "jastvenost" i "otuđenost". Jastvenost nekoga osjeta stupanj je njegove "okrenutosti prema sebstvu". Jastvenosti je komplementarno svojstvo otuđenosti. Otuđenost Brouwer definira kao "mjeru nepovratnosti" u kojoj se subjekt odmakao od nekoga osjeta. Ponekad se u literaturi znade navesti da je Brouwer (bio) solipsist. Ovo, tvrdili smo, može biti samo posljedica nerazumijevanja njegova poimanja jastvenosti. Možda sām naziv navodi na pogrešno tumačenje, ali Brouwer se tim terminom koristi u posebnome smislu, u smislu u kojem subjekt može imati osjet *duše* nekoga drugoga kao "cjelinu jastvenih osjeta".

Nadalje, u mjeri otuđenosti, subjekt postaje disponiran za želju ili zazor prema osjetu ili složevini osjetā. Brouwer te emocije smatra temeljnima; ponudili smo i jedno tumačenje prema kojem one, takoreći, svijest izvode iz najdubljega doma. U svakome slučaju, želja i zazor pokretač su uzročnoga djelovanja, za koje vrijede zakoni klasične logike. Tvrdili smo kako su (relacijska) svojstva jastvenosti, otuđenosti, želje i zazora neizostavan dio misaonoga života subjekta te kako ih se ne smije izostaviti pri adekvatnome opisu izlaska svijesti. Uostalom, ta se svojstva javljaju u istoj fazi u kojoj postaje moguća matematika.

U drugoj fazi izlaska u svijesti se razvija "uzročna pozornost". Njome subjekt od vremenskih nizova tvori uzročne nizove. Ponudili smo analizu karakteristika brouwerovske uzročnosti. Najviše smo pažnje posvetili svojstvu prijelaznosti, za koje Brouwer navodi kako ne vrijedi uvijek o svim uzročnim nizovima. Isto tako, bitna je karakteristika uzročnosti i njezina *nestalnost*; uzročni odnosi mogu prestati vrijediti. To smo oslikali u formalnome opisu izlaska svijesti u drugome dijelu disertacije. Nadalje, posebnim slučajem uzročne pozornosti Brouwer smatra objekte, ovaj put u nešto užem smislu riječi, u smislu u kojem intuicija nije objekt. Ako su objekti potpuno otuđeni, nazivaju se "stvarima". Cjelina stvari čini, kazuje Brouwer, "vanjski svijet *subjekta*". Naime, za *druge* u uzročnoj fazi izlaska svijesti još nema mjesta.

Pažnju smo dodatno posvetili Brouwerovu poimanju (slobodne) volje. Ustvrdili smo kako se radi o jednome od ključnih pojmova, makar je u opisu izlaska svijesti počesto izostala njegova eksplicitna upotreba. Razmotrili smo značenje i utjecaj (slobodne) volje na razvoj svijesti, kao i ulogu slobode (volje) u matematičkim konstrukcijama. Vezano uz volju općenito, izgleda kako je Brouwer smatrao da subjekt slobodnom voljom može utjecati na vremensku i uzročnu pozornost. Jedan je način razumijevanja te teze, tvrdili smo, da su te pozornosti kontingentne. U tome bi se smislu Brouwer i više razlikovao od Kanta no što se obično pretpostavlja; tim više, napuštanje vremenske i uzročne pozornosti može biti pojmljeno kao (kratkotrajan) povratak u najdublji dom svijesti. U intuicionističkoj matematici pak sloboda (izbora) neizostavna je kod "složenijih" konstrukcija koje nalazimo, najvažnije, razmatrajući kontinuum.

Po opisu uzročne pozornosti opisali smo subjektovo djelovanje, tj. njegovu intervenciju u vanjski svijet. Ponovno se radi o ključnome trenutku u izlasku svijesti. Djelovanje, iznijeli smo, ima utjecaj kako na subjektovo prepoznavanje drugih činitelja, tako i na razvoj znanosti i matematike. Ponajprije, usporedbom vlastitoga djelovanja s ponašanjem nekih objekata u vanjskome svijetu subjekt prepoznaje kako neki od njih pokazuju karakteristike voljnoga djelovanja. Na temelju prepoznavanja drugih volja, subjekt prepoznaje druge činitelje, pojedince u svijetu, koji time prestaje biti samo njegovom vlastitim, već postaje svijet koji subjekt dijeli s drugima i u kojem s njima ostvaruje suradnju. U ovome smo kontekstu ponudili analizu Brouwerova dokaza protiv postojanja "mnoštvenosti uma", za koji smo tvrdili kako nije (zamišljen kao) argument za solipsizam.

Suradnja otvara mogućnost za nastanak jezika, potom pojavu znanosti, što vodi do potrebe za sve složenijim jezikom, a što pak rezultira upotrebom *matematike* u jezičnome opisu vanjskoga svijeta u kojem vladaju uzročni zakoni. Jedan je od nezaobilaznih momenata Brouwerove filozofije njegovo poimanje jezika kao nesavršenoga medija za prijenos misli. Tu smo tvrdnju potkrijepili širim pojmovnim okvirom teorije izlaska svijesti.

Prateći redoslijed pojave različitih vrsta sadržaja u izlazećoj svijesti (uz [11] kao polazišnu točku analize), ustanovili smo kako Brouwer matematiku opisuje tek u posljednjoj fazi izlaska svijesti. Tu smo tezu usporedili s uobičajenim shvaćanjem, prema kojem je matematika produkt prve faze izlaska svijesti, ali i van Dalenovim, kako smo nazvali, "uzročnim tumačenjem" brouwerovske matematike, prema kojem matematika nije moguća prije druge faze izlaska svijesti. Ponudili smo srednje tumačenje, prema kojem za matematiku u prvoj fazi postoji sposobnost, ali ne i *motivacija*, koju subjekt nalazi tek težnjom za što efikasnijim *djelovanjem*, a koje je moguće tek u drugoj fazi izlaska svijesti.

Nadalje, istražili smo sam temelj Brouwerove matematike – intuiciju. Radi o "praznome dvojstvu", dvočlanome nizu osjetā lišenom svakoga *osjetilnoga* sadržaja. Potom smo razmotrili dva načela konstrukcije pomoću praznoga dvojstva, samoodmatanje i opetovanje dvojstva. Ustanovili smo kako "prazna n-torstva", što su za Brouwera brojevi, nastaju istim procesom kojim je u svijesti (ranije) nastao svijet osjetā.

Potom smo razmotrili značenje i položaj logike u izlasku svijesti. Iznijeli smo tumačenje prema kojem je Brouwer bio logički pluralist. Naime, objašnjavajući nastanak pogrešnoga vjerovanja u opću valjanost načela isključenja trećega, Brouwer navodi kako to načelo ima "praktičnu valjanost" kada se primjenjuje na "svakodnevne fenomene vanjskoga svijeta". No, prelaskom u beskonačne domene čiste matematike, to načelo gubi svoju valjanost. Tvrdili smo kako u ovome možemo pronaći opravdanje za korištenje klasične logike u opisu prve i druge faze izlaska svijesti, tj. njezina izlaska "u vanjski svijet" u kojem vladaju uzročni zakoni.

U drugome dijelu disertacije ponudili smo formalni prikaz izlaska svijesti. Kao polazišnom logikom koristili smo se logikom promjene LCG, koju iznosi Świętorzecka, najdetaljinje u [86]. Posebnost je te logike njezina semantika, koja sadrži "rastuće" moguće svjetove.

U ovoj logici nemaju svi iskazi u svakome mogućem svijetu istinitosnu vrijednost. Tvrdili smo kako je moguće ponuditi plodonosnu brouwerovsku interpretaciju strukture LCG. Pritom smo, u skladu s Brouwerovom definicijom istine kao "prošlih i sadašnjih iskustava svijesti", početni sustav učinili logikom sadašnjosti i prošlosti. Također, ograničili smo broj mogućih svjetova, kako bi prikaz svakoga od njih odgovarao nekomu mogućemu iskustvu.

Najprije smo iznijeli jednostavnu logiku izlaska svijesti, LEC. Ta logika opisuje prvu fazu izlaska svijesti – tvorbu vremenskih nizova osjetā koji su jastveni ili otuđeni. Nadalje, kako smo istaknuli, neke od (otuđenih) osjeta subjekt želi, a od nekih zazire. To smo formalno oslikali uvevši četiri jednomjesna priroka, koje smo predstavili aksiomatskim shemama. Sustav LEC sustav je naravne dedukcije s dodatnim definicijama i aksiomatskim shemama. Istinitost iskaza tvorenih pomoću četiriju priroka u modelu smo opisali posebnom funkcijom. Za sustav LEC dokazali smo pouzdanost i potpunost, koristeći se u dokazu potonjega svojstva dokazom u Henkin-Lindenbaumovu stilu.

Potom smo pomoću LEC izgradili logiku LEC^+, proširenu logiku izlaska svijesti, koja opisuje drugu fazu izlaska svijesti. Karakterisičan za LEC^+ jest dvomjesni uzročni djelatelj Cau, koji smo uveli na semantičkoj razini analizom Brouwerove definicije uzročnoga niza. Postavili smo postupno uvjet istinitosti uzročnih iskaza. Naime, Brouwer navodi kako se uzročni odnosi uspostavljaju među *ponavljajućim* osjetima ili složevinama osjetā. Tvrdili smo kako, da bismo mogli smisleno govoriti o ponavljanju, moramo isključiti neke slučaje, one u kojima su osjeti u pitanju uvijek prisutni ili uvijek odsutni u svijesti (uz razumijevanje mogućega svijeta kao sadržaja svijesti subjekta). To smo nazvali isključivanjem fenomena "opće uzročnosti" i "opće posljedičnosti".

Za postavljeni uvjet istinitosti istražili smo valjanost nekih iskaza. U skladu s Brouwerovim poimanjem "ulančavanja" uzročnih iskaza, načelo prijelaznosti za Cau nije valjano. Istražili smo pod kojim se uvjetima u LEC^+ mogu uspostavljati novi uzročni nizovi, u skladu s Brouwerovom tezom o mogućem prestanku uzročnih odnosa među nekim osjetima. Nadalje, brouwerovska uzročnost može biti refleksivna i simetrična. Predložili smo protumodele tin dvama načelima i ponudili njihovo tumačenje u skladu s teorijom izlaska svijesti.

U jezik proširene logike izlaska svijesti uveli smo djelatelje $\Box$ i $\Diamond$, koje smo definirali pomoću djelatelja neposredne prošlosi, prisutnoga još u LEC. Istažili smo valjanost iskazā s tim dvama djelateljima. Prema brouwerovskome tumačenju, u LEC^+ valjan je iskaz $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$ karakterističan za modalnu logiku S4.3.

Iznijeli smo sustav naravne dedukcije za proširenu logku izlaska svijesti. Tvrdili smo kako je za karakterizaciju uzročnosti u okviru logike izlaska svijesti potreban djelatelj promjene: svaki element uzročnoga niza mora biti podložan promjeni. Za novouvedene djelatelje ponudili smo aksiomatske sheme i definicije, ostatak smo sustava preuzeli iz LEC. Za LEC$^+$ dokazali smo poučke pouzdanosti i potpunosti.

Na kraju rada usporedili smo logike izlaska svijeti. Poimljući neku logiku kao skup poučaka koji u njoj vrijede, logike LEC i LEC$^+$ stavili smo u odnos s intuicionističkom, dvijema važnijim posrednim i klasičnom logikom, ali i nekim modalnim sustavima. Odnose moeđu formaliznima prikazali smo rešetkom, koje je dno intuicionistička (iskazna) logika, a dva vrha "jednake visine" čine LEC$^+$ i S5. Te dvije logike, međutim nisu u odnosu podskup-nadskup. Prelazak iz jednoga sustava u drugi tematizirali smo i iz perspektive Gödelova prijevoda. Primjerice, iz intuicionističke logike pomoću toga privoda možemo dobiti u sustav S4, a potom dodavanjem dodatnih shema i pravila dobiti LEC$^+$. S jednostavnom logikom izlaska svijesti nešto je drukčije. Nju dobivamo iz logike promjene LCG, dodavajući nove aksiomatske sheme i pravila.

Usporedili smo također sematike predloženih logika izlaska svijesti sa Grzegorczykovom i Kripkeovom semantikom za Heytingovu iskaznu intuicionističku logiku. Najviše smo pozornosti posvetili svojstvu *nasljednosti*, prisutnom u Grzegorczykovoj i Kripkeovoj semantici, a koje prizlazi iz tumačenju (atomarnih) iskaza kao matemamatičkih konstrukcija; jednom uspostavljene konstrukcije ne mijenjaju se ni u kojem sljedećem stupnju, stanju ili trenutku. S druge strane, atomarne smo iskaze LEC i LEC$^+$ tumačili kao jednostavne osjete, dok složenim iskazima odgovaraju složevine osjetā. Tvrdili smo kako je plodonosna formalna interpretacija izlaska svijesti moguća samo ako govorimo o osjetima koji su podložni promjeni. Ipak, pokazali smo kako se svojstvo nasljednosti može oslikati u LEC i LEC$^+$.

Nadalje, u kontekstu modalnih logika, usporedili smo svojstva relacije dosupnosti među mogućim svjetovima u LEC$^+$ i nekim drugim modalnim sustavima. Tematizirali smo svojestva *povezanosti i usmjerenosti* relacije dostupnosti, kakva je u semantici za sustav logike S4.3, koji je sadržan u sustavu proširene logike izlaska svijesti. Ustvrdili smo kako su povezanost i usmjerenost među mogućim svjetovima pojmljenima kao doživljenim osjetnim stanjima u skladu s Brouwerovom filozofijom. Međutim, ako moguće svjetove razumijemo kao potencijalne (buduće!) matematičke konstrukcije, tada ta svojstva nisu u skladu s načelima intuicionizma, budući da zanemaruje utjecaj *slobodne volje* pri konstruiranju.

Ono što u logikama izlaska svijeti ne možemo oslikati, ustvdili smo, rast je matematičkoga znanja. Naime, u Grzegorczykovoj i Kripkeovoj sematici moguće je prijeći iz jedne evidencijske situacije u drugu uz "nagli" rast složenosti tsusljedne situacije. Isto tako, moguće je učiniti prijelaz iz jedne situacije u drugu i bez povećanja složenosti. S druge strane, u modelima LEC i LEC$^+$ svaka je susljedna evidencijka situacija (mogući svijet) složenosti $n+1$, ako je prethodna složenosti n. Struktura mogućih svijetova osjetā ne odgovara stukturi mogućih matematičkih konstrukcija, iako su svi poučci intuicionističke logike sadržani u logikama LEC i LEC$^+$.

Literatura

[1] van Atten, M. The irreflexivity of Brouwer's philosophy. *Axiomathes 13*, 1 (2002), 65–77.

[2] van Atten, M. Brouwer, as never read by Husserl. *Synthese 137* (2003), 3–19.

[3] van Atten, M. *On Brouwer.* Belmont, CA: Wadsworth, 2004.

[4] van Atten, M. *Brouwer Meets Husserl: On the Phenomenology of Choice Sequences.* Dordrecht: Springer, 2007.

[5] van Atten, M. *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Brouwer, and Husserl.* Cham, Heidelberg, etc.: Springer, 2015.

[6] van Atten, M. Luitzen Egbertus Jan Brouwer. https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/brouwer/, 2017. stranica posjećena: 13. siječnja 2018.

[7] van Atten, M. i Tragesser, R. Mysticism and mathematics: Brouwer, Gödel, and the common core thesis. U *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Brouwer, and Husser*, M. van Atten, ur. Cham, Heidelberg, etc.: Springer, 2015.

[8] Benacerraf, P. i Putnam, H. *Philosophy of Mathematics: Selected readings.* Cambridge University Press, 1983.

[9] Brouwer, L. E. J. On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory. U *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, J. van Heijenoort, ur. Cambridge: Harvard University Press, 1967, str. 335–341.

[10] Brouwer, L. E. J. *Collected Works, Vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics (*ur. A. Heyting). Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.

[11] Brouwer, L. E. J. Consciousness, philosophy, and mathematics. [10], str. 480–494.

[12] Brouwer, L. E. J. Die moeglichen Maechtigkeiten. [10], str. 102–104.

[13] Brouwer, L. E. J. The effect of intuitionism on classical algebra of logic. [10], str. 551–554.

[14] Brouwer, L. E. J. Essentially negative properties. [10], str. 478–479.

[15] Brouwer, L. E. J. Guidelines of intuitionistic mathematics. [10], str. 477.

[16] Brouwer, L. E. J. Historical background, principles and methods of intuitionism. U *L.E.J. Brouwer Collected Works, Volume 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting, ur. Amsterdam: North-Holland, 1975, str. 508–515.

[17] Brouwer, L. E. J. Intuitionism and formalism. U *L.E.J. Brouwer Collected Works, Volume 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting, ur. Amsterdam: North-Holland, 1975, str. 123–138.

[18] Brouwer, L. E. J. Mathematik, Wissenschaft und Sprache. [10], str. 417–428.

[19] Brouwer, L. E. J. The nature of geometry. [10], str. 112–120.

[20] Brouwer, L. E. J. On the Foundations of Mathematics. [10], str. 13–101.

[21] Brouwer, L. E. J. Points and spaces. [10], str. 522–538.

[22] Brouwer, L. E. J. Synopsis of the signific movement in the Netherlands: prospects of the signific movement. [10], str. 465–471.

[23] Brouwer, L. E. J. The unreliability of the logical principles. [10], str. 107–111.

[24] Brouwer, L. E. J. Historical introduction and fundamental notions. U *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*, D. van Dalen, ur. Cambridge: Canbridge University Press, 1981, str. 1–20.

[25] Brouwer, L. E. J. Profession of faith. [81], str. 387–393.

[26] Brouwer, L. E. J. Will, knowledge and speech. [81], str. 418–431.

[27] Brouwer, L. E. J. Life, art, and mysticism. *Notre Dame Journal of Formal Logic 37*, 3 (1996), 389–429.

[28] Brouwer, L. E. J. Mathematics science, and language. U *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, P. Mancosu, ur. New York: Oxford University Press, 1998, str. 45–53.

[29] Bull, R. A., Segerberg, K. Basic modal logic. U *Handbook of Philosophical Logic (vol. 2)*, second izd., sv. 3. Dordrecht: Springer, 1984, str. 1–82.

[30] Burgess, J. P. *Philosophical Logic*. Princeton University Press, 2009.

[31] Chagrov, A. i Zakharyaschev, M. *Modal Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

[32] Clifford, J. E. Tense logic and the logic of change. *Logique el Analyse 9* (1966), 219–230.

[33] Czermak, J. i Świętorzecka, K. Discreteness of time and change. *Studia Philosophiae Christianae 47*, 4 (2011), 5–17.

[34] van Dalen, D. Brouwer: the genesis of his intuitionism. *Dialectica 32*, 3-4 (1978), 291–303.

[35] van Dalen, D. From a Brouwerian point of view. *Philosophia Mathematica 6*, 2 (1998), 209–226.

[36] van Dalen, D. The role of language and logic in Brouwer's work. *Logic in Action* (1999), 3–14.

[37] van Dalen, D. The development of Brouwer's intuitionism. U *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, V. F. H. et al., ur. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, str. 117–152.

[38] van Dalen, D. Intuitionistic logic. U *Handbook of Philosophical logic (vol. 5)*, D. M. G. i F. Guenthner, ur., sv. 5. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, str. 1–115.

[39] van Dalen, D. Another look at Brouwer's dissertation. U *One Hundred Years of Intuitionism*, M. van Atten et al., ur. Basel: Birkhäuserr, 2008, str. 3–20.

[40] van Dalen, D. *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*. London: Springer, 2011.

[41] van Dalen, D. *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics Is Rooted in Life*. London: Springer, 2013.

[42] Devidé, V. *Matematička čitanka*. Školska knjiga, 1987.

[43] Ewald, W. *From Kant to Hilbert: a Source Book in the Foundations of Mathematics*, sv. II. Oxford: Clarendon Press, 2005.

[44] Fagin, R. t. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.

[45] Franchella, M. Like a bee on a windowpane: Heyting's reflections on solipsism. *Synthese 105* (1995), 207–251.

[46] Franchella, M. Brouwer and Nietzsche: Views about life, views about logic. *History and Philosophy of Logic 36*, 4 (2015), 367–391.

[47] Gödel, K. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus. U *Kurt Gödel, collected works, vol. 1: publications 1929–1939*, S. Feferman, ur.: Oxford University Press, 1986, str. 300–302.

[48] Grzegorczyk, A. A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic. *Indagationes Mathematicae 26* (1964), 596–601.

[49] Hall, N. Causation and the price of transitivity. *The Journal of Philosophy 97*, 4 (2000), 198–222.

[50] Hesseling, D. E. *Gnomes in the Fog: the Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s.* Basel: Birkhäuser, 2003.

[51] Heyting, A. The formal rules of intuitionistic logic. str. 311–327.

[52] Heyting, A. Sur la logique intuitionniste. *Ac. Royale de Belgique. Bull. de la Classe des Sciences, 5* (1930), 957–963.

[53] Heyting, A. *Intuitionism: an Introduction.* Amsterdam: North Holland, 1956.

[54] Hitchcock, C. The intransitivity of causation revealed in equations and graphs. *The Journal of Philosophy 98*, 6 (2001), 273–299.

[55] Hughes, G. E. i Cresswell, M. J. *A New Introduction to Modal Logic.* London i New York: Routledge, 1996.

[56] Husserl, E. *Kartezijanske meditacije.* Zagreb: Izvori i tokovi, 1975. (s njemačkoga preveo: Pavić, Ž.).

[57] Husserl, E. *Ideje za čistu fenomenologiju i fenomenologijsku filozofiju.* Zagreb: Breza, 2007. (s njemačkoga preveo: Zenko, F.).

[58] Jankov, V. A. The calculus of the weak "law of the excluded middle". *Mathematics of the USSR – Izvestiya 2*, 5 (1968), 997–1004.

[59] Jankov, V. A. Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi. *Soviet mathematics*, 9 (1968), 806–807.

[60] Kneale, W. C. i Kneale, M. *The Development of Logic.* Oxford University Press, 1962.

[61] Koetsier, T. Arthur Schopenhauer and L.E.J. Brouwer: A comparison. U *Mathematics and the Divine: A Historical Study*, T. K. i L. Bergmans, ur. Amsterdam: Elsevier, 2005, str. 569–593.

[62] Kovač, S. Svojstva klasične logike. https://www.hrstud.unizg.hr/images/50014310, stranica posjećena 3. svibnja 2018.

[63] Kovač, S. Some weakened Gödelian ontological systems. *Journal of Philosophical Logic 32* (2003), 565–588.

[64] Kovač, S. Causal interpretation of Gödel's ontological proof. U *Gödel's Ontological Argument: History, Modifications and Controversies*, K. Świętorzecka, ur. Varšava: Semper, 2015, str. 163–202.

[65] Kreisel, G. i Newman, M. H. A. Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881–1966. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 15* (1969), 39–68.

[66] Kripke, S. A. Semantical analysis of intuitionistic logic I. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 40* (1965), 2–130.

[67] Kuiper, J. J. C. *Ideas and Explorations: Brouwer's Road to Intuitionism.* PhD thesis, University of Utrecht, 2004.

[68] Lewis, D. K. *Convention: A Philosophical Study.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1969.

[69] McKinsey, J. C. C. i Tarski, A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting,. *Journal of Symbolic Logic 13* (1948), 1–15.

[70] Meyer, J.-J. C., van der Hoek, W. *Epistemic Logic for Computer Science and Artificial Intelligence.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1995.

[71] Placek, T. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity: a Critical Exposition of Arguments for Intuitionism.* Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1999.

[72] Posy, C. J. Brouwer's constructivism. *Synthese 27*, 1-2 (1974), 125–159.

[73] Posy, C. J. Mathematics as a transcendental science. U *Phenomenology and the Formal Sciences*, S. et al., ur. Dordrecht: Springer, 1991, str. 107–132.

[74] Posy, C. J. Intuitionism and philosophy. U *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, S. Shapiro, ur. Oxford: Oxford University Press, 2005, str. 318–355.

[75] Prior, A. N. *Time and Modality.* Clarendon Press, 1957.

[76] Schlimm, D. Against against intuitionism. *Synthese 147*, 1 (2005), 171–188.

[77] Smith, B., Smith, D. W. Introduction. U *The Cambridge Companion to Husserl*, B. Smith, D. W. Smith, ur. Cambridge: Cambridge University Press, 2005, str. 1–44.

[78] Smith, D. W. Phenomenology. https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/phenomenology/, 2018. stranica posjećena: 25. kolovoza 2018.

[79] Sorbi, A. i Terwijn, S. A. Generalizations of the weak law of the excluded middle. *Notre Dame Journal of Formal Logic 56*, 2 (2015), 321–331.

[80] van Stigt, W. P. The rejected parts of Brouwer's dissertation on the foundations of mathematics. *Historia mathematica 6*, 4 (1979), 385–404.

[81] van Stigt, W. P. *Brouwer's Intuitionism*. North-Holland Amsterdam, 1990.

[82] van Stigt, W. P. Introduction to Life, art, and mysticism. *Notre Dame Journal of Formal Logic 37*, 3 (1996), 381–387.

[83] Świętorzecka, K. i Czermak, J. Some calculus for a logic of change. *Journal of Applied Non-Classical Logic 22*, 1–2 (2012), 3–10.

[84] Świętorzecka, K. i Czermak, J. A logic of change with modalities. *Logique et Analyse 232* (2015), 509–525.

[85] Świętorzecka, K. LCG – logika zmian. *Filozofia Nauki 15*, 1 (2007), 19–46.

[86] Świętorzecka, K. *Classical Conceptions of the Changeability of Situations and Things Represented in Formalized Languages*. Varšava: Cardinal Stefan Wyszyński Publishing House, 2008.

[87] Świętorzecka, K. A proposal to describe a phenomenon of expanding language. In *Proceedings of SPIE* (2012), sv. 8454, *24*, str. 1–6.

[88] Świętorzecka, K. Between the logic of Parmenides and the logic of liar. *Bulletin of the Section of Logic 38*, 3/4 (2009), 123–133.

[89] Šikić, Z. Novija filozofija matematike. U *Novija filozofija matematike*. Beograd: Nolit, 1987, str. 11–32.

[90] Tait, W. W. Against intuitionism: Constructive mathematics is part of classical mathematics. *Journal of Philosophical Logic 12*, 2 (1983), 173–195.

[91] Trobok, M. Debating (neo)logicism: Frege and the neo-Fregeans. U *Between Logic and Reality: Modeling Inference, Action and Understanding*, M. T. et al., ur. Dordrecht: Springer, 2012, str. 83–98.

[92] Weingartner, P. The need for pluralism of causality. *Logic and Logical Philosophy 25* (2016), 461–498.

[93] von Wright, G. H. And Next. *Acta Philosophica Fennica 18* (1965), 293–304.

[94] von Wright, G. H. Always. *Theoria 34*, 3 (1968), 208–221.

Autorov životopis

Ivan Restović rođen je 1989. godine u Splitu. Osnovnu školu i gimnaziju završava u Koprivnici, a 2008. godine na Hrvatskim studijima Sveučilišta u Zagrebu upisuje preddiplomski studij filozofije i komunikologije. Na istome visokome učilištu upisuje diplomski studij filozofije; diplomira 2013. temom "Modalni prijevodi intuicionističke i posrednih logika" pod mentorstvom prof. dr. sc. Srećka Kovača. Iste godine na Hrvatskim studijima upisuje poslijediplomski doktorski studij filozofije. Od 2016. godine zaposlen je kao suradnik na Institutu za filozofiju u Zagrebu. Područja interesa: filozofijska logika, filozofija logike. Objavljeni radovi:

- "The First Decade of the Logic of Change LCG", *Prolegomena: Časopis za filozofiju* 16, 2: 51–160, 2017. (pregledni rad)
- "Kaarlo Jaakko Juhani Hintikka (1929.–2015.)", *Prolegomena: Časopis za filozofiju* 15, 1: 91–92, 2016. (nekrolog)
- "Pluralizam logika i pluralitet pluralizama", *Scopus: časopis za filozofiju studenata Hrvatskih studija* 26: 29–53, 2014. (stručni rad)
- "Složenost jednostavnosti", *Scopus: časopis za filozofiju studenata Hrvatskih studija* 25: 52–58, 2012. (stručni rad)
- "Michael J. Loux: Metafizika: suvremen uvod (prijevod: Zvonimir Čuljak)", *Scopus: časopis za filozofiju studenata Hrvatskih studija* 25: 52–58, 2012. (prikaz).